BAB V
APLIKASI PD TINGKAT DUA

Tujuan Instruksional:

- *Mampu membuat model PD pada Sistem Gerak*
- *Mampu memahami klasifikasi Sistem Gerak*
- *Mampu membuat model dan penyelesaian PD pada klasifikasi Sistem Gerak*
- *Mampu membuat model dan penyelesaian PD pada rangkaian listrik LC dan RLC seri*

5.1 Sistem Gerak

Sistem gerak diilustrasikan dengan benda bermassa m yang tergantung pada suatu pegas, ditunjukkan pada Gambar 23. Pemodelan sistem gerak pada Gambar 23, didasarkan pada Hukum Newton II, yaitu:

$$F = m.a$$

dengan:

F = gaya-gaya yang bekerja pada benda

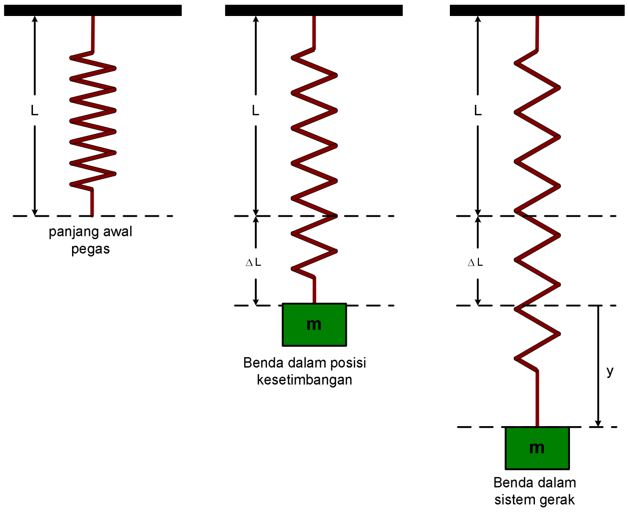
m = massa benda

a = percepatan gerak benda

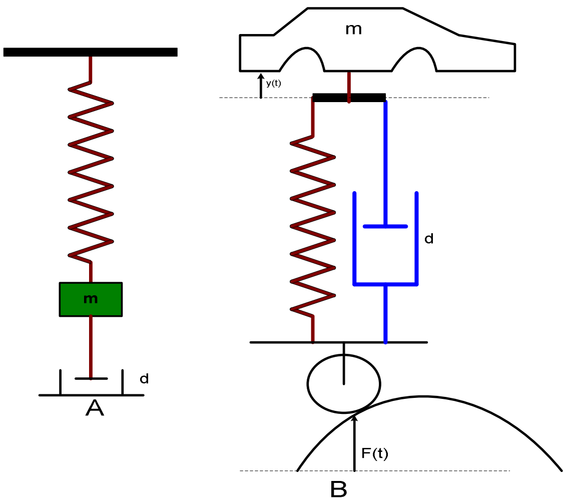
Gaya-gaya yang bekerja pada benda yang tergantung pada pegas:

1. $F_g = m.g$, F_g adalah gaya tarik gravitasi benda, m = massa benda dan g = gravitasi. Arah gaya ini ke bawah karena pengaruh gravitasi. Gaya ini sering disebut sebagai berat benda.
2. $F_s = -k(y + \Delta L)$, $F_s =$ adalah gaya pegas, k = konstanta pegas, y = posisi benda, ΔL = perubahan panjang pegas. Arah gaya pegas ke atas dan ke bawah. Jika pegas ditarik F_s negatif, arah gaya ke atas dan jika pegas ditekan F_s positif, arah gaya ke bawah.

3. $F_d = -d.\frac{dy}{dt}$, F_d= gaya redam, arah gaya berlawanan dengan gerak benda. d = konstanta redaman, $\frac{dy}{dt}$ = kecepatan benda. Jika $d > 0$ sistem disebut Sistem Teredam (*Damped Systems*), jika $d = 0$ sistem disebut Sistem Tak-teredam (*Undamped Systems*)
4. $F_e = F(t)$, F_e = gaya eksternal, arah gaya dapat ke atas atau ke bawah. Penerapan gaya ini langsung pada benda atau pegas.



Gambar 1 Sistem Gerak Benda pada Pegas



Gambar 2 A. Sistem Gerak dengan Peredam
B. Sistem Gerak dengan Peredam dan Gaya Luar F(t)

Berdasarkan Hukum Newton II di atas maka:

$$F = m.a$$

F adalah gaya-gaya yang bekerja pada benda, $a = \frac{d^2y}{dt^2}$ adalah percepatan benda sehingga:

$$F_g + F_s + F_d + F_e = m.\frac{d^2y}{dt^2}$$

atau

$$m.g + -k(y + \Delta L) - d.\frac{dy}{dt} + F(t) = m.\frac{d^2y}{dt^2}$$

untuk sistem dalam kesetimbangan $m.g = k\Delta L$, sehingga persamaan menjadi:

$$-ky - d.\frac{dy}{dt} + F(t) = m.\frac{d^2y}{dt^2}$$

atau

$$m.\frac{d^2y}{dt^2} + d.\frac{dy}{dt} + ky = F(t)$$

Model persamaan terakhir menghasilkan persamaan diferensial orde-2. Persamaan diferensial orde-2 di atas menggambarkan sistem gerak benda pada pegas. Jika $F(t) = 0$ (tanpa gaya eksternal) sistem disebut **sistem gerak** *bebas (unforced),* jika $F(t) \neq 0$ disebut **sistem gerak paksa** *(forced).* Jika $d = 0$ maka sistem disebut **sistem takteredam** *(undamped)* dan jika $d > 0$ maka sistem disebut **sistem teredam** *(damped).*

5.1.1 Sistem Gerak Bebas Takteredam $(F(t) = 0\,, d = 0)$

Model sistem gerak harmonik bebas takteredam:

$$m.\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$$

Gerak benda didapatkan dengan menyelesaikan PD di atas. Jika persamaan dibagi dengan m, maka PD menjadi:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + {\omega_0}^2 y = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

persamaan karakteristik PD di atas: $r^2 + {\omega_0}^2 = 0$

akar-akar persamaan karakteristik: $r_{1,2} = \pm i\omega_0$

sehingga penyelesaian umum PD yang menggambarkan gerak benda:

$$\boldsymbol{y(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t}$$

Jika persamaan dikali dan dibagi dengan $\sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2}$ maka:

$$\boldsymbol{y(t) = \sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2}\left[\frac{c_1}{\sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2}} \cos \omega_0 t + \frac{c_2}{\sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2}} \sin \omega_0 t\right]}$$

Jika didefinisikan :

$$\boldsymbol{R = \sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2}}$$

$$\boldsymbol{\cos \theta = \frac{c_1}{\sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2}}}$$

$$\boldsymbol{\sin \theta = \frac{c_2}{\sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2}}}$$

maka persamaan menjadi:

$$\boldsymbol{y(t) = R[\cos \theta \ \cos \omega_0 t + \sin \theta \sin \omega_0 t]}$$

atau

$$\boldsymbol{y(t) = R \cos (\omega_0 t - \theta)}$$

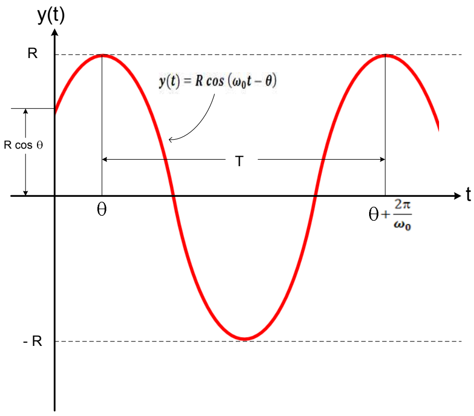
dengan $\boldsymbol{R}$ disebut amplitudo sistem gerak harmonik

$\boldsymbol{\theta}$ disebut sudut fasa

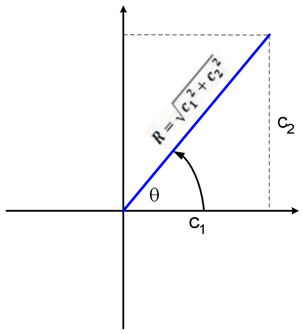
$\boldsymbol{\omega_0}$ disebut frekuensi = $\sqrt{\frac{k}{m}}$

jika satu siklus gerak harmonik yang terjadi digambarkan dalam unit waktu 2π, maka frekuensi didefinisikan menjadi

$f = \frac{\omega_0}{2\pi}$, maka periode gerak harmonik $T = 1/f = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$



Gambar 3 Ilustrasi Gerak Harmonik $y(t) = R\cos(\omega_0 t - \theta)$



Gambar 4 Ilustrasi Hubungan c1, c2, R dan θ

Contoh kasus:

Sistem gerak harmonik benda yang tergantung pada pegas seperti Gambar 23, jika massa benda m=1/4 kg dan konstanta pegas k= 16 N/m, redaman = 0. Pegas saat tertarik benda bertambah panjang 1 m dan mulai bergerak ke atas dengan kecepatan 8m/det. Sistem tidak diberi gaya luar.

a. Tentukan model persamaan yang menggambarkan sistem gerak harmonik pada pegas pada contoh kasus di atas!
b. Tentukan persamaan gerak benda!
c. Tentukan amplitudo, sudut fasa, frekuensi dan periode gerak benda!

Penyelesaian:

a. Model persamaan sistem gerak harmonik pada pegas.

$$m.\frac{d^2y}{dt^2} + d.\frac{dy}{dt} + ky = F(t)$$

pada contoh kasus diketahui redaman d=0, gaya luar $() = 0$, massa m= ¼ kg , konstanta pegas k= 16 N/m, sehingga model persamaan gerak harmonik pada pegas menjadi:

$$\frac{1}{4}.\frac{d^2y}{d\,t^2} + 16y = 0$$

dengan kondisi awal:

posisi awal benda $y(0) = 1$ dan

kecepatan awal benda $\frac{dy}{dt}(0) = -8$.

b. Persamaan gerak benda.

persamaan gerak benda didapatkan dengan menyelesaikan model PD (a), yaitu:

$$\frac{1}{4}.\frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0 \leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + 64y = 0$$

$$y(0) = 0{,}1\ ; \frac{dy}{dt}(0) = -8$$

penyelesaiannya adalah:

- persamaan karakteristik dari PD di atas $r^2 + 64 = 0$
- akar-akar persamaan karakteristik $r = \pm\, i8$
- solusi umum PD:

$$y(t) = c_1\, cos\, 8t + c_2\, sin\, 8t$$

dengan memasukkan syarat kondisi awal maka:

$$y(0) = \ c_1 = 1$$

$$y'(0) = \ 8c_2 = -8 \rightarrow c_2 = -1$$

sehingga persamaan gerak benda:

$$y(t) = \ cos\, 8t - \ sin\, 8t$$

c. Menentukan amplitudo, sudut fasa, frekuensi dan periode dengan membentuk persamaan () = − dalam satu sinus/cosinus. Bentuk umum persamaan satu sinus/cosinus sistem gerak pada pegas:

$$y(t) = R\, cos(\omega_0 t - \theta)$$

$$= R\, cos\, (8t - \theta)$$

dengan:

$$R = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2}$$

$$tan\, \theta = \frac{c_2}{c_1}$$

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$T = 1/f = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

sehingga:

$$amplitudo\ R = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

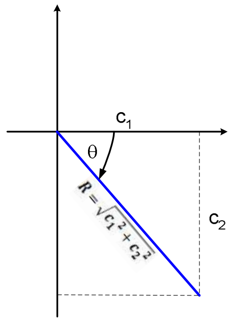
$$frekuensi\ f = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$periode\ \ T = \frac{\pi}{4}$$

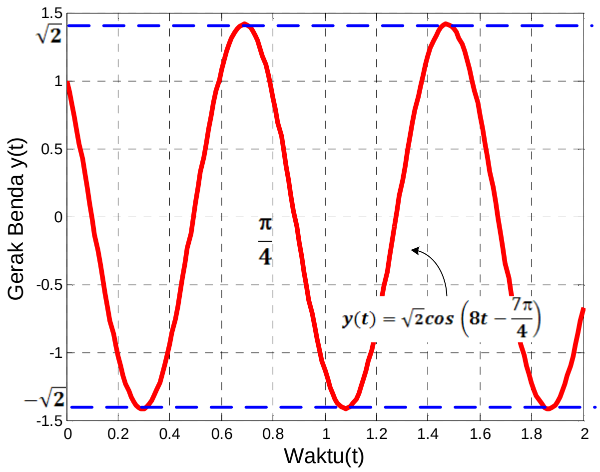
$$tan\, \theta = -1(kuadran\ IV)$$

$$sudut\ fasa\ \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$y(t) = R\ cos\ (8t - \theta)$$
$$= \sqrt{2}cos\ \left(8t - \frac{7\pi}{4}\right)$$



Gambar 5 Ilustrasi Sudut Fasa pada Contoh Kasus



Gambar 6 Harmonik Benda pada Pegas, $R = \sqrt{2}; f = \frac{4}{\pi};\ \ \theta = \frac{7\pi}{4}$

Latihan Soal:

Tentukan persamaan gerak harmonik benda pada model persamaan diferensial berikut! Tentukan Ampitudo, Frekuensi, Periode dan sudut fasa dari persamaan gerak harmoniknya!

1. $y'' + y = 0 \quad\ y(0) = 1\ \ y'(0) = 0$
2. $y'' + y = 0 \quad\ y(0) = 0\ \ y'(0) = 1$
3. $y'' + y = 0 \quad\ y(0) = 1\ \ y'(0) = 1$

4. $y'' + 9y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$
5. $y'' + 4y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = -2$

5.1.2 Sistem Gerak Bebas Teredam $(\boldsymbol{F(t) = 0}, \boldsymbol{d \neq 0})$

Model sistem gerak benda bebas teredam:

$$m.\frac{d^2y}{dt^2} + d.\frac{dy}{dt} + ky = 0$$

Persamaan gerak benda didapatkan dengan menyelesaikan PD di atas. Untuk mengilustrasikan gerak benda pada sistem pegas bebas teredam akan diuraikan pada tiga kasus, yaitu sistem teredam kurang (*underdamped*), sistem teredam kritis (*critically damped*), dan sistem teredam lebih (*overdamped*), dimana masing-masing ditentukan dari nilai diskriminan $d^2 - 4mk$

Persamaan karakteristik dari model sistem gerak benda bebas teredam adalah:

$$\boldsymbol{m.r^2 + d.r + k = 0}$$

sehingga akar-akar persamaan karakteristiknya: (lihat subbab 4.5)

$$\boldsymbol{r_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4mk}}{2m}}$$

5.1.2.a Sistem Teredam Kurang (*underdamped*), $(\boldsymbol{d^2 - 4mk} < 0)$

Solusi persamaan gerak benda pada sistem teredam kurang (*underdamped*) didapatkan jika $d^2 - 4mk < 0$, dimana akar-akar persamaan karakteristik adalah:

$$r_{1,2} = \frac{-d \pm i\sqrt{4mk - d^2}}{2m}$$

persamaan solusinya adalah: (lihat pembahasan pada subbab 4.5)

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)t} + c_2\, e^{(\alpha - i\beta)t};\ dengan\ \alpha = -d/2m\,, \beta = \frac{\sqrt{(4mk - d^2)}}{2m}}$$

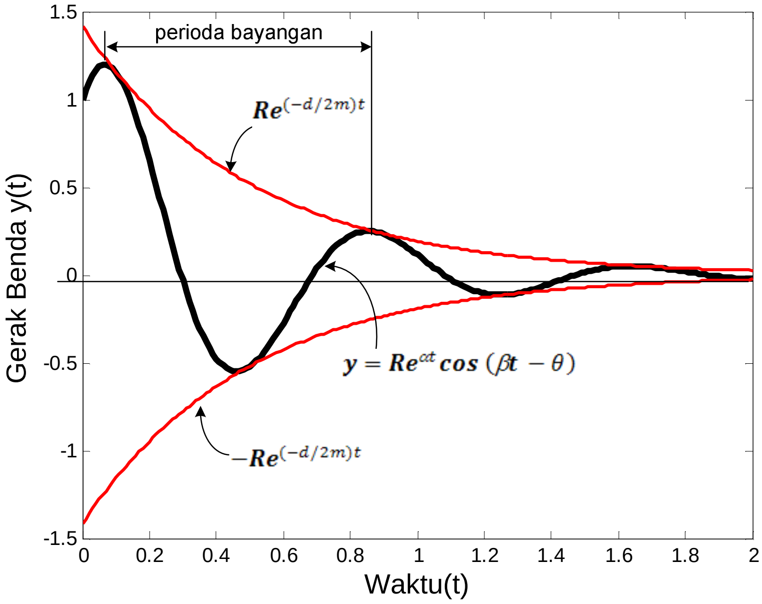
$$\boldsymbol{= e^{(-d/2m)t}(A\cos \beta t\ + B\sin \beta t)}$$

bentuk satu sinus/cosinus persamaan di atas adalah:

$$y = Re^{(-d/2m)t} \cos\,(\beta t\ - \theta)$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\tan \theta = \frac{B}{A}$$



Gambar 7 Osilasi pada Gerak Benda Bebas Teredam Kurang

Program MATLAB untuk Gambar 28 sebagai berikut:

```
%gerak benda bebas teredam kurang
%R=2^0.5, alfa=-2, beta=8 teta=pi/4
clear all;
close all;
clc;
t=(0:0.01:2);
yt=2^0.5*exp(-2*t).*(cos(8*t-pi/4))
plot(t,yt,'k','linewidth',3)
hold on
amp1=2^0.5*exp(-2*t)
plot(t,amp1,'r','linewidth',2)
hold on
amp2=-2^0.5*exp(-2*t)
plot(t,amp2,'r','linewidth',2)
xlabel('Waktu(t)','fontsize',14)
ylabel('Gerak Benda y(t)','fontsize',14)
```

Faktor kosinus $\boldsymbol{cos}\,(\beta \boldsymbol{t} - \theta)$ menyebabkan osilasi bernilai antara +1 dan -1. Perioda osilasi jika dilihat pada Gambar 28 bukan perioda asli atau sering disebut sebagai perioda bayangan (*quasi-period*) atau perioda teredam (*damped-period*), didefinisikan sebagai:

$$T_d = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{(4mk - d^2)}}{2m}} = \frac{4\pi m}{\sqrt{(4mk - d^2)}}$$

Frekuensi dinyatakan sebagai frekuensi bayangan (*quasi frequency*) atau teredam (*damped-frequency*), yaitu $f_d = \frac{\beta}{2\pi}$. Sedangkan $\boldsymbol{Re}^{(-d/2m)t}$ disebut amplitudo teredam (*damped-amplitude*).

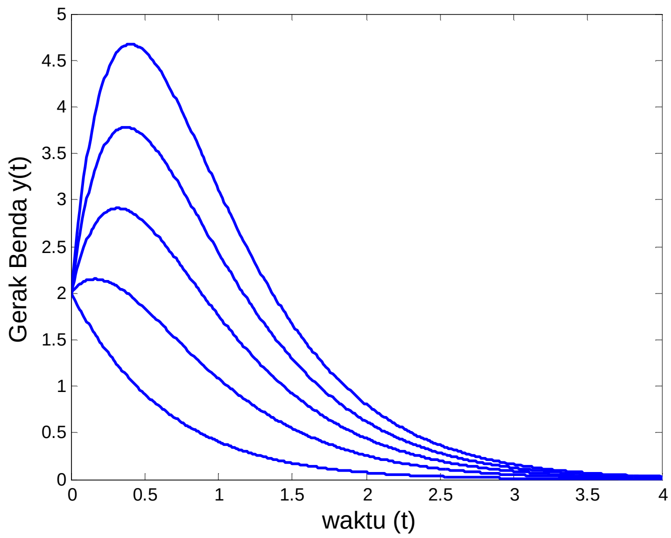
5.1.2.b Sistem Teredam Kritis (*critically damped*), $(d^2 = 4mk)$

Pada sistem teredam kritis $d^2 = 4mk$ sehingga akar-akar persamaan karakteristik sama yaitu: (lihat pembahasan pada subbab 4.5)

$$r_{1,2} = \frac{-d}{2m}$$

Persamaan solusinya :

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2}\,\boldsymbol{t})\,\boldsymbol{e}^{\left(\frac{-d}{2m}\right)\boldsymbol{t}}$$

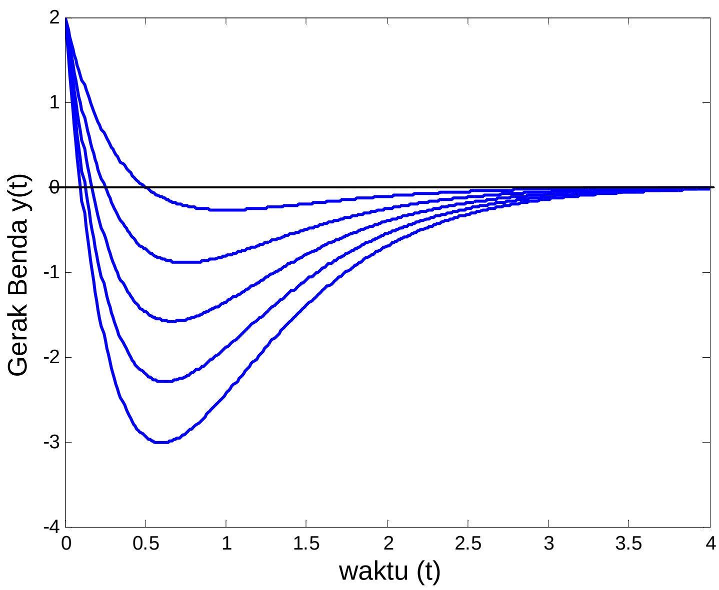


Gambar 8 Gerak Benda pada Sistem Gerak Bebas Teredam Kritis (c_1, c_2 positif)

Program MATLAB untuk Gambar 29 adalah sebagai berikut:

```
%gerak benda teredam kritis y=(c1+c2t)exp((-d)/2m)t)
%c1=2; c2=1:5:25; -d/2m=-2

clear all;
close all;
clc;
t=(0:0.01:4);
for c2=1:5:25
y1=2*(exp(-2*t));
y2=c2*t.*(exp(-2*t));
yt=y1+y2
plot(t,yt,'b','linewidth',2)
hold on
end
xlabel(' waktu (t)','fontsize',14)
ylabel('Gerak Benda y(t)','fontsize',14)
```



Gambar 9 Gerak Benda pada Sistem Gerak Bebas Teredam Kritis (c_2 negatif)

Program MATLAB untuk Gambar 30 sebagai berikut:

```
%gerak teredam kritis y=(c1+c2t)exp((-d)/2m)t)
%c1=2; c2=-20:4:-2; -d/2m=-2
```

```
clear all;
close all;
clc;

t=(0:0.01:4);
for c2=-20:4:-2
y1=2*(exp(-2*t));
y2=c2*t.*(exp(-2*t));
yt=y1+y2
plot(t,yt,'b','linewidth',2)
hold on
end
xlabel(' waktu (t)','fontsize',14)
ylabel('Gerak Benda y(t)','fontsize',14)
```

5.1.2.c Sistem Teredam Lebih (*overdamped*), $\left(d^2 > 4mk\right)$

Pada sistem teredam lebih $d^2 > 4mk$ sehingga akar-akar persamaan karakteristik adalah: (lihat pembahasan pada subbab 4.5)

$$\boldsymbol{r_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4mk}}{2m}}$$

Solusi umum persamaan gerak pada sistem teredam lebih adalah:

$$\boldsymbol{y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}}$$

Pada kenyataannya nilai $\boldsymbol{r_{1,2}} < 0$ sehingga untuk $\boldsymbol{t} \to \infty$ maka $\boldsymbol{y(t) = 0}$**.** Jika $y(t)$ kita turunkan, yaitu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y'(t)} &= \boldsymbol{c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t}} \\ &= \boldsymbol{e^{r_1 t}\left(c_1 r_1 + c_2 r_2 e^{(r_2 - r_1)t}\right)} \end{aligned}$$

maka $\boldsymbol{y'(t) = 0}$ hanya jika $\boldsymbol{\left(c_1 r_1 + c_2 r_2 e^{(r_2 - r_1)t}\right) = 0}$

Jadi secara umum gerak benda pada pegas pada sistem teredam lebih mempunyai perilaku yang sama dengan sistem teredam kritis, yaitu $\boldsymbol{t} \to \infty$ maka $\boldsymbol{y(t) = 0}$ dan hanya memiliki satu titik puncak maksimum dan minimum pada $\boldsymbol{t} > 0$ seperti ditunjukkan pada Gambar 29 dan Gambar 30.

Contoh kasus Pengaruh Peredaman:

Sebuah sistem gerak benda pada pegas dengan peredam dimodelkan oleh persamaan berikut:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + d.\frac{dy}{dt} + y = 0$$
$$y(0) = 1; y'(0) = 0$$

Jika d=1, 2 dan 4, tentukan persamaan gerak benda! Bagaimana pengaruh perubahan nilai konstanta peredaman d pada gerak benda?

Penyelesaian:

persamaan karakteristik dari model persamaan sistem adalah:

$$r^2 + d.r + 1 = 0$$

akar-akar persamaan karakteristik:

$$r_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4}}{2}$$

a. Jika d=1, $d^2 - 4 < 0$ disebut sistem teredam kurang

Akar-akar persamaan karakteristik adalah:

$$r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

solusi umum persamaan gerak benda:

$$y = e^{(-d/2m)t}(Acos\,\beta t\ + B\,sin\,\beta t)$$
$$= e^{(-1/2)t}\left(Acos\frac{\sqrt{3}}{2}t\ + B\,sin\,\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

subsitusi y(0) = 1, didapatkan:

$$y = e^{\left(-\frac{1}{2}\right)t}\left(Acos\frac{\sqrt{3}}{2}t\ + B\,sin\,\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$= Acos\,0\ = 1\ \rightarrow\ A = 1$$

subsitusi y′(0) = 0, didapatkan:

$$y' = -\frac{1}{2}e^{(-1/2)t}\left(Acos\frac{\sqrt{3}}{2}t\ + B\,sin\,\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$
$$+ e^{(-1/2)t}\left(-A\frac{\sqrt{3}}{2}sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\ + B\,\frac{\sqrt{3}}{2}cos\,\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$0 = -\frac{1}{2}(Acos0\,) + \left(B\,\frac{\sqrt{3}}{2}cos\,0\right)$$

$$0 = -\frac{1}{2}(1\,) + \left(B\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \ \rightarrow\ B = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

maka solusi khusus gerak benda sistem teredam kurang adalah:

$$y = e^{(-1/2)t}\left(cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\ + \frac{1}{\sqrt{3}}\ sin\ \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

bentuk satu sinus/cosinus:

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{(-1/2)t}\left(cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\ - \frac{\pi}{6}\right)$$

b. Jika d=2, $d^2 - 4 = 0$ disebut sistem teredam kritis

Akar-akar persamaan karakteristik adalah:

$$r_{1,2} = -1$$

solusi umum persamaan gerak benda:

$$y = (c_1 + c_2\ t)\ e^{-t}$$

subsitusi y(0) = 1, didapatkan:

$$y(0) = (c_1 + c_2\ 0)\ e^{-0} \rightarrow c_1 = 1$$

subsitusi $y'(0) = 0$,, didapatkan:

$$y'(0) = c_2\ e^{-0} - (c_1 + c_2\ 0)\ e^{-0}$$

$$0 = c_2 - c_1 \rightarrow c_2 = 1$$

maka solusi khusus gerak benda sistem teredam kritis adalah:

$$y = (1 +\ t)\ e^{-t}$$

c. Jika d=4, $d^2 - 4 > 0$ disebut sistem teredam lebih

Akar-akar persamaan karakteristik adalah:

$$r_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4}}{2}$$

$$= -\mathbf{2} \pm \sqrt{\mathbf{3}}$$

solusi umum persamaan gerak benda:

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

$$= c_1 e^{(-2+\sqrt{3})t} + c_2 e^{(-2-\sqrt{3})t}$$

subsitusi y(0) = 1, didapatkan:

$$1 = c_1 e^{(-2+\sqrt{3})0} + c_2 e^{(-2-\sqrt{3})0}$$

$$1 = c_1 + c_2$$

subsitusi $y'(0) = 0$, didapatkan:

$$0 = c_1 r_1 e^{r_1 0} + c_2 r_2 e^{r_2 0}$$

$$0 = c_1(-2+\sqrt{3}) + c_2(-2+\sqrt{3})$$

dari dua persamaan konstanta yaitu:

$$c_1 + c_2 = 1 \text{ dan } c_1(-2+\sqrt{3}) + c_2(-2+\sqrt{3}) = 0$$

diperoleh

$$c_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$c_2 = \frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

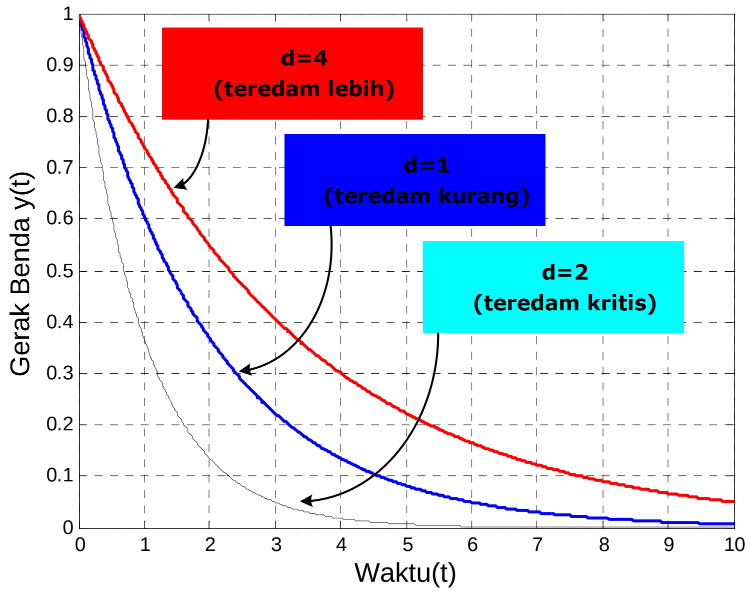
maka solusi khusus gerak benda sistem teredam lebih adalah:

$$\boldsymbol{y = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} e^{(-2+\sqrt{3})t} + \frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} e^{(-2-\sqrt{3})t}}$$

Pengaruh konstanta redaman d pada sistem gerak benda dijelaskan sebagai berikut:

- d=1 maka gerak benda $y(t) \to 0$ menurut fungsi $\boldsymbol{e^{-0.5t}}$
- d=2 maka gerak benda $y(t) \to 0$ menurut fungsi $\boldsymbol{e^{-t}}$
- d=4 maka gerak benda $y(t) \to 0$ menurut fungsi $\boldsymbol{e^{(-2-\sqrt{3})t} = e^{-0.3t}}$

disimpulkan bahwa pada d=2 (teredam kritis) gerak benda paling cepat ke posisi setimbang/y(t)=0, sedang paling lama pada d=4 (teredam lebih). Hal ini juga dapat dilihat pada Gambar 5.10



Gambar 10 Gerak Benda Pada Variasi Nilai Konstanta Redaman (d)

Latihan Soal:

Tentukan komponen amplitudo, frekuensi dan sudut fasa pada model sistem gerak benda berikut! Gambarkan dengan MATLAB persamaan gerak benda-nya!

1. $y(t) = 4e^{-t}cos\,(2t - \pi)$
2. $y(t) = 3e^{-2t}cos\,\left(\sqrt{3}t - \frac{\pi}{3}\right)$
3. $y(t) = 5e^{-2t}cos\,\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$
4. $y(t) = 3e^{-2t}cos\,(5t - \pi)$

Tentukan apakah gerak benda berikut diklasifikasikan dalam sistem teredam kurang(*underdamped*), teredam kritis (*critically damped*) atau teredam lebih (*over damped*)!

5. $y'' + 4y = 0$
6. $y'' - 2y' + y = 0$
7. $y'' + 4y' + 4y = 0$
8. $y'' + 2dy' + d^2y = 0\,;\; d > 0$
9. $y'' + 2dy' + k^2y = 0\,;\; d > 0\; dan\; k^2 = d^2$
10. $y'' + 2dy' + ky = 0\,;\; d^2 > k\; dan\; k < 0$

5.2 Rangkaian Listrik

Subbab berikut akan menjelaskan pemodelan rangkaian listrik beserta penyelesaiannya. Hal penting adalah dua fenomena fisik berbeda (yaitu: sistem gerak benda pada pegas dan rangkaian listrik) menghasilkan model persamaan matematika dan solusi yang sama.

5.2.1 Rangkaian LC seri

Rangkaian LC seri dengan sumber baterai E volt digambarkan pada Gambar 32. Dengan hukum Tegangan Kirchoff didapatkan model persamaan pada Gambar 32, yaitu:

$$V_L+V_C=E$$

dengan: V_L adalah tegangan pada induktor L yaitu $L\frac{dI}{dt}$

V_C adalah tegangan pada kapasitor C yaitu $\frac{1}{C}\int Idt$

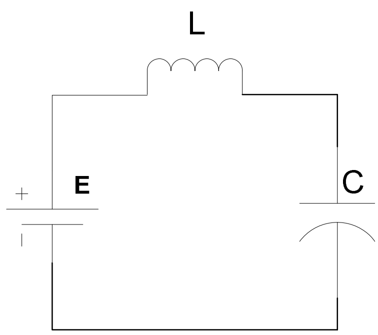
diketahui bahwa $I=\frac{dQ}{dt}$ dengan Q adalah muatan dalam Coulomb. Sehingga model persamaan dapat dituliskan:

$$L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int Idt=E$$

untuk menghilangkan tanda integral, persamaan dideferensialkan, maka:

$$L\frac{d}{dt}\left(\frac{dI}{dt}\right)+\frac{1}{C}\int\frac{d}{dt}Idt=\frac{d}{dt}(E)$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{C}I=\frac{d}{dt}(E)$$



Gambar 11 Rangkaian LC seri

Model persamaan untuk Gambar 33 dapat juga dinyatakan dalam muatan Q(t), yaitu:

$$L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int Idt=E$$

$$L\frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{dt}\right)+\frac{1}{C}\int\frac{dQ}{dt}dt=E$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{1}{C}Q=E$$

Kasus A. Jika sumber baterai E= 0 $\left(\frac{d}{dt}(E)=0\right)$

Model persamaan rangkaian dinyatakan sebagai:

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{C}I=0$$

atau

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{CL}I=0$$

penyelesaian persamaan homogen orde-2 di atas adalah

persamaan karakteristik dari PD di atas:

$$r^2+\frac{1}{CL}=0$$

akar-akar persamaan karakteristik:

$$r_{1,2}=\pm i\sqrt{\frac{1}{CL}}$$

sehingga penyelesaian umum PD (lihat bahasan subbab 4.5)

$$y=c_1e^{(\alpha+i\beta)x}+c_2\,e^{(\alpha-i\beta)x}=Ae^{\alpha x}cos\,\beta x\;+Be^{\alpha x}\,sin\,\beta x$$

dengan $c_1,c_2,A,B=konstanta$; $r=\alpha\pm i\beta$

maka:

$$y(t)=A\,cos\,\sqrt{\frac{1}{CL}}t+B\,sin\,\sqrt{\frac{1}{CL}}t$$

contoh kasus LC1:

Tentukan kuat arus I(t) rangkaian LC seperti Gambar 32 jika L= 10 henry, C=0,004 farad, E=0 volt !

Penyelesaian:

Model persamaan rangkaian LC, dengan L= 10 henry, C=0,004 farad, E=0:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 25I = 0$$

persamaan karakteristik dari PD:

$$r^2 + 25 = 0$$

akar-akar persamaan karakteristik:

$$r_{1,2} = \pm i5$$

penyelesaian PD:

$$I(t) = A\,cos\,5t + B\,sin\,5t$$

Latihan Soal:

Tentukan kuat arus I(t) pada rangkaian LC seperti Gambar 32 jika:

1. L=0,2 henry, C=0,05 farad, E= 0 volt
2. L=0,2 henry, C=0,1 farad, E= 0 volt
3. L=0,2 henry, C=0,05 farad, E= 100 volt
4. L=0,2 henry, C=0,1 farad, E= 100 volt
5. L=10 henry, C=0,05 farad, E= 0 volt, I(0)=0, Q(0)=Q
6. Apa yang dapat disimpulkan dari jawaban soal 1-4?

Kasus B. Jika sumber baterai E= konstanta

Menentukan kuat arus I(t) untuk kasus ini berdasarkan model persamaan diferensial Q(t), selanjutnya I(t) didapatkan dari hubungan $I(t) = \frac{dQ}{dt}$. Model persamaan rangkaian untuk Q (t) dinyatakan sebagai:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = E$$

atau

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{CL}Q = \frac{E}{L}$$

persamaan di atas adalah PD tak homogen orde-2, penyelesaiannya disebut **penyelesaian lengkap** terdiri atas penyelesaian homogen dan penyelesaian takhomogen.

Penyelesaian Homogen:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{CL}Q = 0$$

persamaan karakteristik dari PD di atas:

$$r^2 + \frac{1}{CL} = 0$$

akar-akar persamaan karakteristik:

$$r_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{1}{CL}}$$

penyelesaian homogen:

$$Q_h(t) = A\,cos\,\sqrt{\frac{1}{CL}}t + B\,sin\,\sqrt{\frac{1}{CL}}t$$

Penyelesaian Takhomogen:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{CL}Q = \frac{E}{L}$$

dengan menggunakan metode koefisien taktentu (subbab 4.8.1)

$$F(t) = \frac{E}{L} \to Q_p(t) = K_0$$

substitusi () = pada PD, yaitu:

$$\frac{1}{CL}K_0 = \frac{E}{L}$$

$$K_0 = EC$$

jadi penyelesaian tak homogen adalah

$$Q_p(t) = EC$$

Penyelesaian lengkap

$$Q(t) = Q_h(t) + Q_p(t) = A\,cos\,\sqrt{\frac{1}{CL}}t + B\,sin\,\sqrt{\frac{1}{CL}}t + EC$$

Contoh kasus LC2:

Jika pada contoh kasus LC1 di atas diketahui, E=250 volt, arus I(0)=0 dan muatan Q(0)=0 tentukan solusi khusus I(t)

Penyelesaian:

model persamaan rangkaian menggunakan fungsi Q(t), karena jika dipakai model fungsi I(t) maka substitusi Q(0) untuk mendapatkan solusi khusus, yaitu dengan integrasi solusi umum I(t) akan menghasilkan konstanta baru, sehingga solusi khusus I(t) tidak dapat ditentukan.

Model persamaan rangkaian LC seri dalam fungsi Q(t):

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{1}{LC}Q=\frac{E}{L}$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+25Q=25$$

Penyelesaian model persamaan di atas disebut solusi lengkap/penyelesaian lengkap yang terdiri atas dua solusi PD, yaitu solusi homogen dan solusi takhomogen

Solusi Homogen:

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+25Q=0$$

persamaan karakteristik dari PD:

$$r^2+25=0$$

akar-akar persamaan karakteristik:

$$r_{1,2}=\pm i5$$

penyelesaian PD homogen:

$$Q_h(t)=A\,cos\,5t+B\,sin\,5t$$

Solusi takhomogen:

$$R(x)=25\rightarrow Q_p(t)=K_0$$

substitusi $Q_p(t) = K_0$ ke model PD didapatkan:

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+25Q=25$$

$$0+25K_0=25\rightarrow K_0=1$$

penyelesaian khusus takhomogen

$$Q_p(t)=1$$

solusi umum lengkap (solusi homogen+solusi tak homogen):

$$Q(t)=1+A\,cos\,5t+B\,sin\,5t$$

substitusi nilai awal

$$Q(0)=1+A\,cos\,0+B\,sin\,0=0\rightarrow A=-1$$

$$I=\frac{dQ}{dt}=-5A\,sin\,5t+5Bcos\,5t$$

$$I(0)=-5A\,sin\,0+5Bcos\,0=0\rightarrow B=0$$

Jadi solusi khusus lengkap:

$$Q(t)=1-\,cos\,5t$$

dan Arus I(t) adalah

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = 5\ sin\ 5t$$

Kasus C. Jika sumber baterai E= E_0 cos ωt

Model persamaan rangkaian untuk Q (t) dinyatakan sebagai:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = E_0\ cos\ \omega t$$

atau

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{CL}Q = \frac{E_0\ cos\ \omega t}{L}$$

Penyelesaian model persamaan di atas adalah penyelesaian lengkap muatan fungsi waktu, terdiri atas penyelesaian homogen dan penyelesaian takhomogen.

Penyelesaian Homogen:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{CL}Q = 0$$

persamaan karakteristik dari PD di atas:

$$r^2 + \frac{1}{CL} = 0$$

akar-akar persamaan karakteristik:

$$r_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{1}{CL}}$$

penyelesaian homogen:

$$Q_h(t) = A\ cos\ \sqrt{\frac{1}{CL}}t + B\ sin\ \sqrt{\frac{1}{CL}}t$$

atau

$$Q_h(t) = C\ cos\left(\sqrt{\frac{1}{CL}}t - \theta\right)$$

jika $\omega_0{}^2 = \frac{1}{CL}$, maka

$$Q_h(t) = C\ cos\ (\omega_0 t - \theta)$$

Penyelesaian Takhomogen:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{CL}Q = \frac{E_0\ cos\ \omega t}{L}$$

dengan menggunakan metode koefisien taktentu (subbab 4.8.1)

$$\frac{E_0 \cos \omega t}{L} \to Q_p(t) = K\cos \omega t \ + \ M\sin \omega t$$

$$Q_p{}'(t) = -\omega K\sin \omega t + \omega M\cos \omega t$$

$$Q_p{}''(t) = -\omega^2 K\cos \omega t - \omega^2 M\sin \omega t$$

substitusi $\mathbf{Q_p}$, $\mathbf{Q_p}''$ ke persamaan didapatkan:

$$-\omega^2 K\cos \omega t - \omega^2 M\sin \omega t + \frac{1}{CL}(K\cos \omega t \ + \ M\sin \omega t) = \frac{E_0}{L}\cos \omega t$$

$$\left(\frac{1}{CL}K - \omega^2 K\right)\cos \omega t + \left(\frac{M}{CL} - \omega^2 M\right)\sin \omega t = \frac{E_0}{L}\cos \omega t$$

dengan menyamakan koefisiennya maka:

$$\left(\frac{1 - CL\omega^2}{CL}\right)K = \frac{E_0}{L} \to K = \frac{E_0\, C}{(1 - CL\omega^2)}$$

jadi solusi takhomogen adalah:

$$Q_p(t) = \frac{E_0\, C}{(1 - CL\omega^2)}\cos \omega t \qquad \frac{:CL}{:CL}$$

$$= \frac{E_0}{L(\frac{1}{CL} - \omega^2)}\cos \omega t$$

jika didefinisikan ${\omega_0}^2 = \frac{1}{CL}$, sehingga:

$$Q_p(t) = \frac{E_0}{L({\omega_0}^2 - \omega^2)}\cos \omega t$$

Penyelesaian lengkap:

$$Q(t) = Q_h(t) + Q_p(t) = C\cos(\omega_0 t - \theta) + \frac{E_0}{L({\omega_0}^2 - \omega^2)}\cos \omega t$$

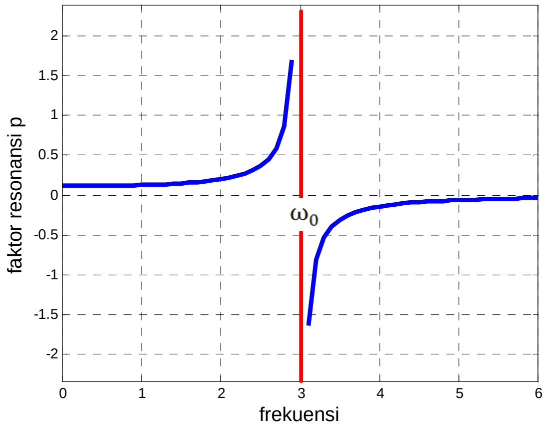
Keluaran ini menggambarkan superposisi dua gelombang cosinus dengan frekuensi selaras yang disebut sebagai frekuensi dasar/alamiah (natural frequency) besarnya $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

Amplitudo maksimum pada persamaan gelombang keluaran adalah:

$$A_{maks} = \frac{E_0}{L({\omega_0}^2 - \omega^2)} = \frac{E_0}{L}\,\rho \text{ dengan } \rho = \frac{1}{({\omega_0}^2 - \omega^2)}$$

ρ disebut faktor resonansi

Amplitudo maksimum ini tergantung pada ω_0, ω dan akan terjadi jika jika $\omega_0 = \omega$ (disebut resonansi).



Gambar 12 Faktor Resonansi

Program MATLAB untuk Gambar 33

```
%faktor resonansi
clear all;
close all;
clc;
wo=3
w=(0:0.1:6);
p=(wo^2-w.^2).^-1;
plot(w,p,'b','linewidth',3)
grid on
axis equal
hold on
xlabel('frekuensi','fontsize',14)
ylabel('faktor resonansi p','fontsize',14)
```

Jika terdapat kondisi awal yaitu Q(0)=0 dan Q’(0)=0 maka persamaan lengkap menjadi:

Untuk kondisi awal Q(0)=0:

$$Q(t) = C\,cos\,(\omega_0 t - \theta) + \frac{E_0}{L({\omega_0}^2 - \omega^2)} cos\,\omega t$$

$$0 = C\,cos\,(0 - \theta) + \frac{E_0}{L({\omega_0}^2 - \omega^2)} cos\,0$$

$$C\,cos\,(\theta) = -\frac{E_0}{L({\omega_0}^2 - \omega^2)}$$

Untuk kondisi awal Q'(0)=0

$$Q'(t) = -C\,\omega_0 sin\,(\omega_0 t - \theta) + \frac{E_0}{L({\omega_0}^2 - \omega^2)} \omega\,sin\,\omega t$$

$$0 = -C\,\omega_0 sin\,(0 - \theta) + \frac{E_0}{L({\omega_0}^2 - \omega^2)} \omega\,sin\,0$$

$$C\,sin\,(\theta) = 0$$

Sehingga jika:

$$C\,cos\,(\omega_0 t - \theta) = Ccos\omega_0 t\,cos\theta + Csin\omega_0 t\,sin\theta$$

dengan substitusi $C\,cos\,(\theta) = -\frac{E_0}{L({\omega_0}^2 - \omega^2)}$ dan $C\,sin\,(\theta) = 0$

$$C\,cos\,(\omega_0 t - \theta) = -\frac{E_0}{L({\omega_0}^2 - \omega^2)}\ cos\omega_0 t$$

sehingga:

$$Q(t) = C\,cos\,(\omega_0 t - \theta) + \frac{E_0}{L({\omega_0}^2 - \omega^2)} cos\,\omega t$$

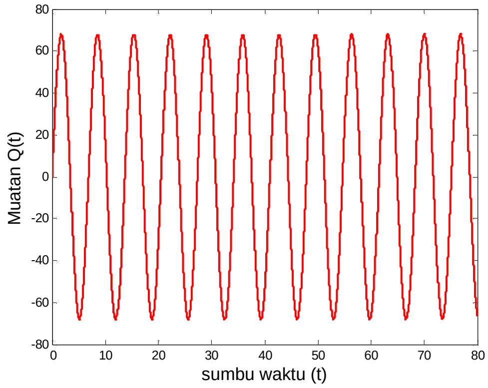
$$= -\frac{E_0}{L({\omega_0}^2 - \omega^2)}\ cos\omega_0 t\ + \frac{E_0}{L({\omega_0}^2 - \omega^2)} cos\,\omega t$$

$$= \frac{E_0}{L({\omega_0}^2 - \omega^2)}\ (cos\,\omega t - cos\omega_0 t)$$

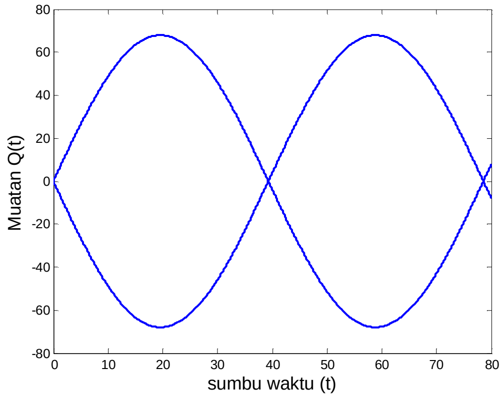
jika $cos\,A - cos\,B = \ 2\,sin\,\frac{A+B}{2}\ sin\,\frac{B-A}{2}$ (buktikan!) maka*:*

$$Q(t) = \frac{2E_0}{L({\omega_0}^2 - \omega^2)} sin\,\frac{\omega_0 + \omega}{2}\,t\,sin\,\frac{\omega_0 - \omega}{2} t$$

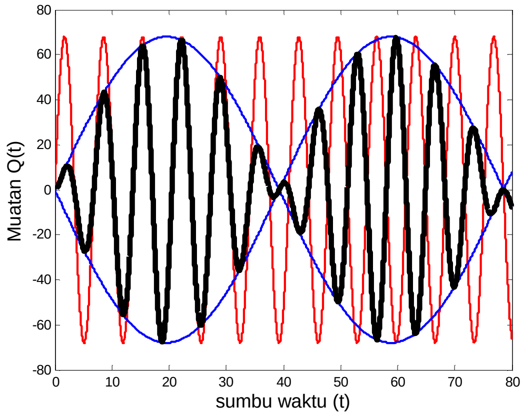
Gambar berikut mengilustrasikan osilasi Q(t) jika selisih ω dengan ω_0 kecil (Gambar 34 -36):



Gambar 13 Osilasi $\boldsymbol{Q(t)} = \frac{2E_0}{L(\omega_0{}^2-\omega^2)} sin\ \frac{\omega_0+\omega}{2}\ t$



Gambar 14 Osilasi $\boldsymbol{Q(t)} = \pm\frac{2E_0}{L(\omega_0{}^2-\omega^2)}\ sin\ \frac{\omega_0-\omega}{2} t$



Gambar 15 Penyelesaian lengkap Q(t) untuk kasus ω-ω_0 kecil

Program MATLAB Gambar 36

```
%Arus pada Rangk LC seri E=Eo sin (wo-w)
%wo-w = kecil
clear all;
close all;
clc;
E0=10;
L=1;
W0=1;
W=0.84;
A=(W0+W)*2^-1;
B=(W0-W)*2^-1;
t=(0:0.01:80);
I=2*E0*L^-1*(W0^2-W^2)^-1*sin(t.*(A))
plot(t,I,'r','linewidth',2)
hold on
I=2*E0*L^-1*(W0^2-W^2)^-1*sin(t.*(B));
plot(t,I,'b','linewidth',2)
hold on
I=-2*E0*L^-1*(W0^2-W^2)^-1*sin(t.*(B));
plot(t,I,'b','linewidth',2)
hold on
I=2*E0*L^-1*(W0^2-W^2)^-1*sin(t.*(A)).*sin(t.*(B));
plot(t,I,'k','linewidth',4)
xlabel('sumbu waktu (t)','fontsize',14)
ylabel('Muatan Q(t)','fontsize',14)
```

Dari Gambar 34 menunjukkan osilasi Q(t) lebih cepat daripada osilasi Q(t) pada Gambar 35. Gambar 36 adalah hasilkali persamaan Gambar 34 dan 35 yang merupakan penyelesaian lengkap rangkaian LC dengan $\boldsymbol{\omega} \neq \omega_0$ **.** Fenomena fisik model persamaan ini dapat dirasakan pada proses penalaan nada sistem akustik dimana akan terdengar gejala naik turun suara pada saat frekuensi dua sumber suara mendekati sama.

Kasus D. Jika sumber baterai E= E_0 cos ωt dengan $\boldsymbol{\omega} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{CL}}}$

Model persamaan rangkaian untuk Q (t) dinyatakan sebagai:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{1}{C}Q=E_0\cos\omega t$$

atau

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\omega^2Q=\frac{E_0\cos\omega t}{L}$$

Penyelesaian Homogen:

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\omega^2Q=0$$

persamaan karakteristik dari PD di atas:

$$r^2+\omega^2=0$$

akar-akar persamaan karakteristik:

$$r_{1,2}=\pm i\omega$$

penyelesaian homogen:

$$Q_h(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t\ atau\ Q_h(t)=C\cos(\omega t-\theta)$$

Penyelesaian Takhomogen:

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\omega^2Q=\frac{E_0\cos\omega t}{L}$$

dengan menggunakan metode koefisien taktentu aturan modifikasi maka bentuk solusi partikular (lihat subbab 4.8.1)

$$\boldsymbol{Q_p}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{t}(K\cos\omega t+M\sin\omega t)$$

$$\boldsymbol{Q_p}'(\boldsymbol{t})=K\cos\omega t-\omega tK\sin\omega t+M\sin\omega t+\omega tM\cos\omega t$$

$$\boldsymbol{Q_p}''(\boldsymbol{t})=-\omega K\sin\omega t-\omega K\sin\omega t-\omega^2tK\cos\omega t+\omega M\cos\omega t+\omega M\cos\omega t-\omega^2M\sin\omega t$$

$$=-2\omega K\sin\omega t-\omega^2tK\cos\omega t+2\omega M\cos\omega t-\omega^2M\sin\omega t$$

substitusi $\mathbf{Q_p}$, $\mathbf{Q_p}''$ ke persamaan didapatkan:

$$-2\omega K\sin\omega t-\omega^2tK\cos\omega t+2\omega M\cos\omega t-\omega^2M\sin\omega t$$

$$+\boldsymbol{\omega^2t}(K\cos\omega t+M\sin\omega t)=\frac{\boldsymbol{E_0}}{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{\cos\omega t}$$

$$(2\omega M)\cos\omega t+(-2\omega K)\sin\omega t=\frac{\boldsymbol{E_0}}{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{\cos\omega t}$$

dengan menyamakan koefisiennya maka:

$$2\omega M \quad = \frac{\boldsymbol{E_0}}{\boldsymbol{L}} \rightarrow M = \frac{\boldsymbol{E_0}}{2\omega \boldsymbol{L}}$$

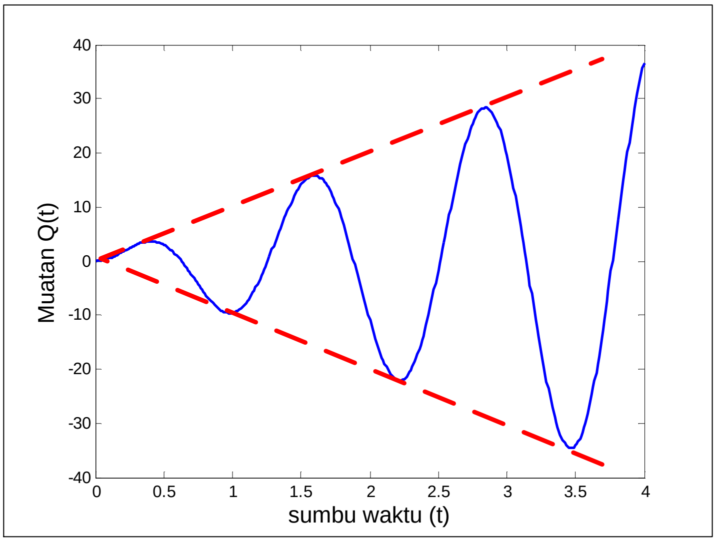
$$-2\omega K = 0 \rightarrow K = \mathbf{0}$$

jadi solusi takhomogen adalah:

$$\boldsymbol{Q_p}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}(K\cos \omega t \ + \ M\sin \omega t) \ = \frac{\boldsymbol{E_0}}{\boldsymbol{2\omega L}} \boldsymbol{t \sin \omega t}$$

Penyelesaian lengkap:

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{Q_h}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Q_p}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{Q_h}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{C \cos} \, (\omega_0 \boldsymbol{t} - \boldsymbol{\theta}) + \frac{\boldsymbol{E_0}}{\boldsymbol{2\omega L}} \boldsymbol{t \sin \omega t}$$



Gambar 16 Solusi Partikular untuk Kasus $\boldsymbol{\omega} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\omega L}}}$

Program MATLAB Gambar 37 sebagai berikut:

```
%Arus pada Rangk LC seri E=10t sin 5t dengan ω = √(1/ωL)
clear all;
close all;
clc;
t=(0:0.01:4);
I=10*t.*sin(5*t);
plot(t,I,'b','linewidth',2)
xlabel('sumbu waktu (t)','fontsize',14)
ylabel('Muatan Q(t)','fontsize',14)
```

5.2.2 Rangkaian RLC seri

Rangkaian RLC seri dengan sumber baterai E volt digambarkan pada Gambar 38. Model persamaan rangkaian didapatkan dengan hukum Tegangan Kirchoff, yaitu:

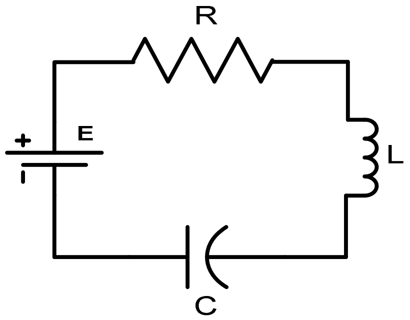
$$V_R+V_L+V_C=E$$

dengan: V_R adalah tegangan pada resistor R yaitu RI

V_L adalah tegangan pada induktor L yaitu $L\frac{dI}{dt}$

V_C adalah tegangan pada kapasitor C yaitu $\frac{1}{C}\int Idt$

diketahui bahwa $I=\frac{dQ}{dt}$ dengan Q adalah muatan dalam Coulomb.



Gambar 17 Rangkaian RLC seri

Model persamaan rangkaian dapat dinyatakan sebagai:

$$RI+L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int Idt=E$$

untuk menghilangkan tanda integral, persamaan dideferensialkan, maka:

$$R\frac{d}{dt}I+L\frac{d}{dt}\left(\frac{dI}{dt}\right)+\frac{1}{C}\int\frac{d}{dt}Idt=\frac{d}{dt}(E)$$

$$\boldsymbol{L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{d}{dt}(E)}$$

Model persamaan untuk Gambar 38 dapat juga dinyatakan dalam muatan Q(t), yaitu:

$$RI+L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int Idt=E$$

$$R\frac{dQ}{dt}+L\frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{dt}\right)+\frac{1}{C}\int\frac{dQ}{dt}dt=E$$

$$\boldsymbol{L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E}$$

Kasus A. Jika sumber baterai E= E_0 $\left(\boldsymbol{\frac{d}{dt}(E) = 0}\right)$

Model persamaan rangkaian dinyatakan sebagai:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0$$

penyelesaian persamaan homogen orde-2 di atas adalah

persamaan karakteristik dari PD di atas:

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$$

akar-akar persamaan karakteristik:

$$r_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$$

sehingga penyelesaian umum PD (lihat bahasan subbab 4.5)

Terdapat tiga kemungkinan akar-akar nilai :

1. Jika $\sqrt{\boldsymbol{R^2 - 4L/C}} > 0$, maka $r_{1,2}$ adalah dua akar Real yang berbeda dengan $r_{1,2} \in$ R maka solusi umumnya:

$$\boldsymbol{y = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}}$$

2. Jika $\sqrt{\boldsymbol{R^2 - 4L/C}} = 0$, maka $r_1 = r_2 = r$ dengan $m_{1,2} \in$ R, maka solusi umumnya:

$$\boldsymbol{y = c_1e^{rt} + c_2x\, e^{rt}}$$

3. Jika $\sqrt{\boldsymbol{R^2 - 4L/C}} < 0$, maka $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ dengan $\alpha, \beta \in$ R maka solusi umumnya:

$$\boldsymbol{y = c_1e^{(\alpha + i\beta)t} + c_2\, e^{(\alpha - i\beta)t}}$$

dengan rumus Euler, yaitu $\boldsymbol{e^{it} = \cos t + i \sin t}$ maka bentuk trigonometri rumus dapat ditentukan:

$\boldsymbol{y = c_1e^{(\alpha + i\beta)t} + c_2t\, e^{(\alpha - i\beta)t}}$

$= \boldsymbol{c_1e^{\alpha t}}(\boldsymbol{\cos}\,\beta\boldsymbol{t} + \boldsymbol{i \sin}\,\beta\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{c_2}\boldsymbol{e}^{\alpha t}(-\boldsymbol{\cos}\,\beta t - \boldsymbol{i \sin}\,\beta t)$; $-\boldsymbol{\cos}\,\beta t = \boldsymbol{\cos}\,\beta t$

$= (\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2})\boldsymbol{e^{\alpha t}}(\boldsymbol{\cos}\,\beta t) + \boldsymbol{i}(\boldsymbol{c_1} - \boldsymbol{c_2})\boldsymbol{e}^{\alpha t}(\boldsymbol{\sin}\,\beta t)$

$= \boldsymbol{Ae}^{\alpha t}\boldsymbol{\cos}\,\beta t + \boldsymbol{Be}^{\alpha t}\,\boldsymbol{\sin}\,\beta t \;, \boldsymbol{A, B} \in$ ***konstanta bil. kompleks***

Kasus B. Jika sumber baterai yaitu $\boldsymbol{\frac{d}{dt}(E)} = E_0 \cos \omega t$

Model persamaan rangkaian dinyatakan sebagai:

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=E_0\;cos\;\omega t$$

Penyelesaian model persamaan di atas terdiri atas penyelesaian homogen dan penyelesaian takhomogen.

Untuk penyelesaian homogen sama dengan penyelesaian pada kasus A.

Penyelesaian TakHomogen:

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=E_0\;cos\;\omega t$$

dengan menggunakan metode koefisien taktentu aturan modifikasi maka bentuk solusi partikular (lihat subbab 4.8.1)

$$\boldsymbol{I_p}(\boldsymbol{t})=Kcos\;\omega t\;+\;Msin\;\omega t$$

$$\boldsymbol{I_p}'(\boldsymbol{t})=-\omega Ksin\;\omega t+\omega Mcos\;\omega t$$

$$\boldsymbol{I_p}''(\boldsymbol{t})=-\omega^2Kcos\;\omega t-\omega^2Msin\;\omega t$$

substitusi $\mathbf{I_p}$, $\mathbf{I_p}''$ ke persamaan didapatkan:

$$L(-\omega^2Kcos\;\omega t-\omega^2Msin\;\omega t)+R(-\omega Ksin\;\omega t+\omega Mcos\;\omega t)$$
$$+\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{C}}(Kcos\;\omega t\;+\;Msin\;\omega t)=\boldsymbol{E_0cos\;\omega t}$$

$$\left(\omega RM+\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{C}}-\omega^2L\right)K\right)cos\;\omega t+\left(-\omega RK+\left(\frac{1}{C}-\omega^2L\right)M\right)sin\;\omega t=\boldsymbol{E_0\;cos\;\omega t}$$

dengan menyamakan koefisiennya maka:

$$-\omega RK+\left(\frac{1}{C}-\omega^2L\right)M=0\ldots\ldots\ldots.(i)$$

$$M=\frac{\omega R}{\left(\frac{1}{C}-\omega^2L\right)}K=\frac{R}{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)}K$$

Jika didefiniskan reaktansi $-S=\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)$ maka

$$M=\frac{-R}{S}K$$

$$\omega RM+\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{C}}-\omega^2L\right)K=\boldsymbol{E_0}\ldots\ldots\ldots(\boldsymbol{ii})$$

Jika kedua ruas dibagi dgn , maka

$$RM+\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\omega\boldsymbol{C}}-\omega\quad L\right)K=\frac{\boldsymbol{E_0}}{\omega}$$

$$R\frac{-R}{S}K - sK = \frac{\boldsymbol{E_0}}{\omega}$$

$$-\left(\frac{R^2}{S} + S\right)K = \frac{\boldsymbol{E_0}}{\omega} \leftrightarrow -\left(\frac{R^2 + S^2}{S}\right)K = \frac{\boldsymbol{E_0}}{\omega}$$

$$\boldsymbol{K} = \frac{-\boldsymbol{E_0}S}{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{R^2} + S^2)}$$

$$\boldsymbol{M} = \frac{-\boldsymbol{R}}{S}\boldsymbol{K} = \frac{\boldsymbol{E_0 R}}{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{R^2} + S^2)}$$

Jadi penyelesaian takhomogen adalah:

$$\boldsymbol{I_p(t)} = \left[\frac{-\boldsymbol{E_0 S}}{\boldsymbol{\omega(R^2 + S^2)}}\right]\boldsymbol{\cos \omega t} + \left[\frac{\boldsymbol{E_0 R}}{\boldsymbol{\omega(R^2 + S^2)}}\right]\boldsymbol{\sin \omega t}$$

Contoh 1:

Tentukanlah muatan Q dan I sebagai fungsi watku t dalam rangkaian RLC seri jika R = 16 Ω, L = 0,02 H, C = 2×10^{-4} F dan E = 12 *volt*. Anggaplah pada saat t= 0, arus I = 0 dan muatan kapasitor Q = 0

Penyelesaian:

Persamaan yang digunakan untuk menyelesaikan kasus ini:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Dengan substitusi R = 16 Ω, L = 0,02 H, C = 2×10^{-4} F dan E = 12 *volt*, maka diperoleh:

$$0{,}02\frac{d^2Q}{dt^2} + 16\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{(2 \times 10^{-4})}Q = 12$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{800\,dQ}{dt} + 250.000\,Q = 600$$

Penyelesaian Persamaan Homogen

- Persamaan karakteristik r^2 + 800 r + 250.000 = 0, mempunyai akar-akar:

$$r_{1,2} = \frac{\left[-800 \pm \sqrt{640.000 - 1.000.000}\right]}{2}$$

= -400 ± 300 i

- Sehingga penyelesaian homogen:

$$Q_h = e^{-400t}\,(C1\cos 300t + C_2 \sin 300t)$$

Penyelesaian TakHomogen

- Dengan menggunaan metode koefisien taktentu (subbab 4.8.1), maka:

$$Q_k = A, \quad \frac{dQ_k}{dt} = 0, \quad \frac{d^2Q_k}{dt^2} = 0$$

- Substitusi $Q_k = A$, $\frac{dQ_k}{dt} = 0$, $\frac{d^2Q_k}{dt^2} = 0$ ke dalam persamaan :

$$\frac{d^2Q_k}{dt^2} + 800\,\frac{dQ_k}{dt} + 250.000\,Q = 600$$

Menghasilkan $Q_k = 2{,}4 \times 10^{-3}$

Karena itu penyelesaian lengkap adalah,

$$Q(t) = 2{,}4 \times 10^{-3} + e^{-400t}\,(C_1 \cos\,300t + C_2 \sin 300t)$$

I(t) diperoleh dengan diferensiasi $Q(t)$ didapatkan:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -400e^{-400t}\,(C_1 \cos\,300t + C_2\,\sin\,300t)$$
$$+ e^{-400t}\,(-300C_1 \sin 300t + 300C_2 \cos\,300t)$$
$$I(t) = e^{-400t}\,[(-400C_1 + 300C_2)\,cos300t + (-300C_1 - 400C_2)\,sin300t]$$

Bila diberlakukan syarat awal, t = 0, I = 0, Q = 0, maka:

$$0 = 2{,}4 \times 10^3 + C_1 \rightarrow C_1 = -2{,}4 \times 10^3$$
$$0 = -400C_1 + 300C_2 \;\rightarrow\; C_2 = \frac{4C_1}{3} = -3{,}2 \times 10$$

Jadi penyelesaian lengkap muatan listrik adalah

Q(t) = 10^{-3} [2,4 – e^{-400t} (2,4 cos 300t + 3,2 sin 300t)]

Contoh 2:

Suatu induktor 2 henry, resistor 16 ohm dan kapasitor 0,02 farad dihubungkan secara seri dengan sutu baterai dengan ggl.*E* = 100 sin 3*t*. Pada *t*=0 muatan dalam kapasitor dan arus dalam rangkaian adalah nol. Tentukanlah (*a*) muatan dan (*b*) arus pada *t*>0.

Penyelesaian:

Misalkan *Q* dan *I* menyatakan muatan dan arus sesaat pada waktu *t*, berdasarkan Hukum Kirchhoff, maka diperoleh persamaan:

$$2\frac{dl}{dt} + 16I + \frac{Q}{0{,}02} = 100 \sin 3t$$

Atau karena *I=dQ/dt,*

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + 25Q = 20 \sin 3t$$

Selesaikan ini terhadap syarat *Q* = 0,*dQ/dt = 0* pada *t* = 0, kita memperoleh hasil akhir:

(*a*) $Q = \frac{25}{52}(2 \sin 3t - 3 \cos 3t) + \frac{25}{52}\, e^{-4t}(3 \cos 3t + 2 \sin 3t)$

$(b)\ I = \frac{dQ}{dt} = \frac{75}{52}(2 \cos 3t + 3 \sin 3t) - \frac{25}{52} e^{-4t}(17 \sin 3t + 6 \cos 3t)$

Suku pertama adalah arus stabil *(steady-state)* dan suku kedua, yang dapat diabaikan untuk waktu yang bertambah, dinamakan arus *transien.*

SOAL-SOAL

1. Tentukan arus I(t) dalam rangkaian LC seri dimana *L*=1H, *C*=1F dan E=100 *volt*! Anggaplah bahwa pada saat t=0, arus I=0 dan muatan kapasitor Q=0.
2. Tentukan arus I(t) dalam rangkaian LC seri dimana *L*=1H, *C*=0,25F dan E=30 sin t *volt*! Anggaplah bahwa pada saat t=0, arus I=0 dan muatan kapasitor Q=0.
3. Tentukan arus I(t) dalam rangkaian LC seri dimana *L*=10H, *C*=1/90F dan E=10 cos 2t *volt*! Anggaplah bahwa pada saat t=0, arus I=0 dan muatan kapasitor Q=0.
4. Tentukan arus I(t) dalam rangkaian LC seri dimana *L*=10H, *C*=0,1F dan E=10t *volt*! Anggaplah bahwa pada saat t=0, arus I=0 dan muatan kapasitor Q=0.
5. Tentukan arus I(t) dalam rangkaian LC seri dimana *L*=2,5H, *C*=10^{-3}F dan E=$10t^2$ *volt*! Anggaplah bahwa pada saat t=0, arus I=0 dan muatan kapasitor Q=0.
6. Tentukan arus I(t) dalam rangkaian LC seri dimana *L*=1H, *C*=1F dan E=1 *volt* jika 0<t<1 dan E=0 jika t>1! Anggaplah bahwa pada saat t=0, arus I=0 dan muatan kapasitor Q=0.
7. Tentukan arus I(t) dalam rangkaian LC seri dimana *L*=1H, *C*=1F dan E=$1-e^{-t}$ *volt* jika 0<t<∏ dan E=0 jika t>∏! Anggaplah bahwa pada saat t=0, arus I=0 dan muatan kapasitor Q=0.
8. Tentukan arus *steady state* dalam rangkaian RLC seri dimana *R*=4 Ω, *L*=1H, *C*=$2\text{x}10^{-4}$ F dan E= 220 *volt*! Anggaplah bahwa pada saat t=0, arus I=0, dan muatan kapasitor Q=0.
9. Tentukan arus *steady state* dalam rangkaian RLC seri dimana *R*=20 Ω, *L*=10H, *C*=10^{-3}F dan E=100 cos t *volt*! Anggaplah bahwa pada saat t=0, arus I=0, dan muatan kapasitor Q=0.

10. Tentukan arus transien dalam rangkaian RLC seri dimana R=200 Ω, L=100H, C=0,005F dan E=500 sin t *volt*! Anggaplah bahwa pada saat t=0, arus I=0 dan muatan kapasitor Q=0.
11. Tentukan arus transien dalam rangkaian RLC seri dimana R=20 Ω, L=5H, C=10^{-2}F dan E=85 sin 4t *volt*! Anggaplah bahwa pada saat t=0, arus I=0 dan muatan kapasitor Q=0.
12. Tentukan arus lengkap dalam rangkaian RLC seri dimana R=80 Ω, L=20H, C=10^{-2} F dan E=100 *volt*! Anggaplah bahwa pada saat 1=0, arus I=0 dan muatan kapasitor Q=0.
13. Tentukan arus lengkap dalam rangkaian RLC seri dimana R=160 Ω, L=20H, C=2x10^{-3} F dan E=481 sin 10t *volt*! Anggaplah bahwa pada saat 1=0, arus I=0 dan muatan kapasitor Q=0.
14. Tentukan arus dalam rangkaian RLC seri dimana R=6 Ω, L=1H, C=0,04 F dan E=24 cos 5t *volt*! Anggaplah bahwa pada saat 1=0, arus I=0 dan muatan kapasitor Q=0.
15. Tentukan arus *steady state* dalam rangkaian RLC seri dimana R=50 Ω, L=30H, C=0,025 F dan E=200 sin 4t *volt*! Anggaplah bahwa pada saat 1=0, arus I=0 dan muatan kapasitor Q=0.
16. Tentukan arus *transien* dalam rangkaian RLC seri dimana R=20 Ω, L=4H, C=0,5 F dan E=10 sin 10t *volt.* Anggaplah bahwa pada saat 1=0, arus I=0 dan muatan kapasitor Q=0.
17. Tentukan arus *lengkap* dalam rangkaian RLC seri dimana R=8 Ω, L=2H, C=0,125 F dan E=10 sin 5t *volt*! Anggaplah bahwa pada saat 1=0, arus I=0 dan muatan kapasitor Q=0.
18. Tentukan arus *transien* dalam rangkaian RLC dimana R=15 Ω, L=5H, C=1,25x10^{-2} F dan E=15 sin 4t *volt*! Anggaplah bahwa pada saat 1=0, arus I=0 dan muatan kapasitor Q=0.
19. Tentukan arus *steady state* dalam rangkaian RLC seri dimana R=8 Ω, L=4H, C=0,125 F dan E=2 sin 2t *volt*! Anggaplah bahwa pada saat 1=0, arus I=0 dan muatan kapasitor Q=0.
20. Tentukan arus *lengkap* dalam rangkaian RLC seri dimana R=250 Ω, L=125H, C=0,002 F dan E=250 sin 3t *volt*! Anggaplah bahwa pada saat 1=0, arus I=0 dan muatan kapasitor Q=0.

DAFTAR PUSTAKA

Kreyszig, Erwin, *Matematika Teknik lanjutan.* Jakarta: Gramedia, 1988.

Stroud, K.A., *Matematika untuk Teknik.* Jakarta: Penerbit Erlangga, 1987.

Farlow, Stanley J., An Introduction to Diffrenential Equations and Their Applications, McGraw-Hill, Singapore, 1994

Howard, P., *Solving ODE in MATLAB*, Fall, 2007

Thompson, S., Gladwell, I., Shampine, L.F., Solving ODEs with MATLAB, Cambridge University Press, 2003

Rosenberg, J.M., Lipsman, R.L., Hunti, B.R., *A Guide to MATLAB for Beginners and Experienced Users*, Cambridge University Press, 2006

GLOSARIUM

Bebas Linear	Dua penyelesaian persamaan diferensial dikatakan bebas linear jika yang satu bukan kelipatan konstanta dari yang lain.
Bernoulli	Suatu persamaan Bernoullidapat dituliskan dalam bentuk $y' + P(x)y = Q(x)y^n$. Jika n=0 atau 1 maka persamaan adalah linear.
Derajat	Derajat dari suatu persamaan adalah pangkat dari suku derivatif tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial.
Eksak	Suatu persamaan eksak dapat dituliskan dalam bentuk $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ dengan derivatif parsial dari M terhadap y sama dengan derivatif parsial dari N terhadap x. Selain itu dikatakan tidak eksak.
Faktor Integrasi	Suatu faktor integrasi adalah suatu fungsi yang dipilih untuk memudahkan penyelesaian dari suatu persamaan diferensial.
Homogen	Suatu persamaan diferensial adalah homogeny jika setiap suku tunggal memuat variable tak bebas atau derivatifnya. Persamaan diferensial yang tidak memenuhi definisi homogen diperhatikan sebagai tak homogeny.
Integral Khusus	Sembarang fungsi yang memenuhi persamaan diferensial tak homogen dinamakan integral khusus.
Karakteristik	Suatu persamaan polynomial yang diperoleh dari persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan dinamakan persamaan karakteristik.
Koefisien Tak Tentu	Metode koefisien tak tentu adalah suatu pendekatan untuk mencari integral khusus dari persamaan diferensial linear tak homogen menggunakan persamaan karakteristik.

Masalah Nilai Awal	Persamaan diferensial dengan syarat tambahan pada fungsi yang tidak diketahui dan derivatif-derivatifnya, semua diberikan pada nilai yang sama untuk veriabel bebas, dinamakan masalah nilai awal. Syarat tambahan tersebut dinamakan syarat awal.
Masalah Nilai Batas	Persamaan diferensial dengan syarat tambahan pada fungsi yang tidak diketahui dan derivatif-derivatifnya diberikan pada lebih dari satu nilai variabel bebas dinamakan masalah nilai batas. Syarat tambahan tersebut dinamakan syarat batas.
Orde	turunan tertinggi dalam PD
Penyelesaian	Suatu fungsi terdiferensial yang memenuhi persamaan diferensial dinamakan penyelesaian diferensial
Penyelesaian eksplisit	Penyelesaian eksplisit dari suatu persamaan diferensial adalah penyelesaian dimana variable tak bebas di tuliskan hanya dalam suku – suku dari variable bebas. Selain itu, penyelesaiannya dinamakan penyelesaian implisit
Penyelesaian khusus	Penyelesaian khusus adalah penyelesaian yang diperoleh dengan menentukan nilai khusus untuk konstanta sembarang yang muncul dalam persamaan umum.
Penyelesaian lengkap	Penyelesaian lengkap adalah jumlahan dari fungsi komplementer dan integral khusus
Penyelesaian umum	Penyelesaian yang diperoleh dari integrasi persamaan diferensial dinamakan penyelesaian umum. Penyelesaian umum dari suatu persamaan diferensial biasa tingkat n membuat n konstanta sembarang yang dihasilkan dari integrasi n kali
Peralihan	Pada persamaan osilator harmonis teredam-terpaksa, penyelesaian homogeny yang mendekati nol selama waktu bertambah dinamakan penyelesaian peralihan
Persamaan	Persamaan menggambarkan hubungan antara variable bebas dan tak bebas. Suatu tanda sama dengan "=" diharuskan ada dalam setiap persamaan
Persamaan diferensial	Persamaan yang melibatkan variable-variabel tak bebas dan derivative-detivatifnya terhadap variable-variabel bebas dinamakan persamaan

	diferensial
Persamaan diferensial biasa	Persamaan diferensial yang hanya melibatkan satu variable bebas dinamakan persamaan diferensial biasa
Persamaan diferensial parsial	Persamaan diferensial yang melibatkan dua atau lebih variable bebas dinamakan persamaan diferensial parsial
Reduksi tingkat	Adalah suatu teknik untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa tingkat dua dengan membawa persamaan ke tingkat satu
Teredam	Dalam system massa pegas terdapat tiga perilaku, yaitu teredam lebih jika persamaan karateristik mempunyai akar-akar real berbeda, teredam kritis jika persamaan karateristik hanya mempunyai satu akar riil, dan teredam kurang jika persamaan karateristik mempunyai akar-akar kompleks
Terpisahkan	Suatu persamaan diferensial adalah terpisahkan jika variable bebas dan tak bebas dapat dipisahkan secara aljabar pada sisi berlawanan dalam persamaan.
Tingkat	Tingkat dari suatu persamaan diferensial adalah derivative tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial.
Trayektori	Suatu sketsa dari penyelesaian khusus dalam bidang fase dinamakan trayektori dari penyelesaian
Trayektori ortogonal	Keluarga kurva pada bidang yang memotong tegak lurus dengan suatu keluarga kurva yang lain dinamakan trayektori orthogonal
Variasi parameter	Metode variasi parameter adalah metode umum menyelesaikan persamaan diferensial linear tak homogeny. Dalam metode ini, integral khusus diperoleh dari fungsi komplemeter dimana setiap suku dikalikan dengan fungsi tak diketahui yang harus ditentukan kemudian

Indeks