BAB IV
PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER

Tujuan Instruksional:

- *Mampu memahami konsep PD Linier*
- *Mampu memahami konsep ketakbebasan linier, determinan Wronski dan superposisi*
- *Mampu memahami metode penyelesaian PD Homogen orde-2*
- *Mampu memahami metode penyelesaian PD takhomogen*

Bentuk umum PD Linier orde-n adalah

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x)$$

PD yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk di atas dikatakan tidak linier.
Contoh:

$x\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 2xy = sin$ adalah PD Linier orde 2

$y\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^2y = e^{-x}$ adalah PD Tak-Linier orde 2

Selanjutnya pembahasan penyelesaian PD Linier orde-n dalam buku ajar ini dimulai pada PD Linier Orde-2, yang kemudian dibuat kasus umum untuk penyelesaian PD orde-n.

Jika F(x) pada persamaan PD Linier orde-n sama dengan nol maka PD disebut PD homogen atau tereduksi atau komplementer. Jika F(x)≠0 maka PD disebut PD lengkap atau PD tak homogen.
Contoh:

$x\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 2xy = sin\, x$ adalah persamaan lengkap/tak homogen

$x\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$ adalah persamaan tereduksi/homogen.

Jika $a_o(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$ adalah konstanta maka PD disebut PD Linier dengan koefisien konstanta, jika tidak disebut PD Linier koefisien variabel.

Bentuk $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$, dapat dituliskan dengan lambang Dy, D^2y, ..., D^ny, dengan D, D^2,... disebut operator diferensial. Sehingga persamaan PD Linier orde-n dapat dinyatakan sebagai:

$$\left(a_0(x)D^{(n)} + a_1(x)D^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)\right)y = F(x) \qquad (b)$$

atau

$$\Phi(D)y = F(x)$$

dengan $\Phi(D) = a_0(x)D^{(n)} + a_1(x)D^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)$ dan disebut *operator suku banyak dalam D*.

Latihan Soal:

Untuk PD berikut klasifikasikan apakah PD homogen/nonhomogen, koefisien variabel/konstanta, linier/nonlinier!

1. $y'' + xy' - y = \sin x$
2. $xy'' + y' - xy = 1$
3. $y'' + (\sin x)y' - xy = e^x$
4. $yy'' + (y')^2 = 0$
5. $y'' + (y')^2 + 2y = 1$
6. Buktikan $(D^2 + 3D + 2)e^{4x} = (D+1)(D+2)e^{4x} = (D+2)(D+1)e^{4x}$!
   Apa yang dapat disimpulkan?
7. Tunjukkan bahwa $xD + 1 \text{ dan } D - 2$ tidak komutatif!

4.1 Teorema Dasar Persamaan Diferensial Linier

Untuk menyelesaikan PD Linier berbentuk

$$\Phi(D)y = F(x) \text{ dengan } F(x) \neq 0,$$

kita misalkan $Y_c(x)$ adalah solusi umum PD homogen dari $\Phi(D)y=0$, maka penyelesaian umum PD Linier adalah dengan menjumlahkan penyelesaian umum PD homogen dan penyelesaian khusus, yaitu:

$$\mathbf{y = Y_c(x) + Y_p(x)}$$

Contoh:

Solusi umum PD homogen: $(D^2-3D+2)y=0$ adalah $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$ dan solusi khusus PD : $(D^2-3D+2)y=4x^2$ adalah $2x^2+6x+7$, maka solusi umum PD lengkap/tak homogen dari $(D^2-3D+2)y=4x^2$ adalah

$$y= c_1e^x+c_2e^{2x}+2x^2+6x+7$$

4.2 Ketakbebasan Linier

Himpunan n fungsi $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ dikatakan takbebas linier pada suatu selang jika ada n konstanta c_1, c_2, …, c_n yang tidak semua nol, sehingga berlaku:

$$c_1\, y_1(x)+ c_2\, y_2(x)+ \ldots + c_n\, y_n(x) = 0$$

jika tidak maka himpunan fungsi tersebut dikatakan bebas linier.

Contoh:

$2e^{3x}$, $5e^{3x}$, e^{-4x} takbebas linier pada suatu selang karena dapat ditentukan konstanta c_1, c_2, c_3 yang tidak semua nol sehingga:

$c_1(2e^{3x})+ c_2\,(5e^{3x})+c_3\,(e^{-4x}) = 0$ dengan $c_1 =-5$, $c_2 =2$, $c_3 =0$

Contoh:

e^x dan xe^x adalah bebas linier karena $c_1(e^x)+ c_2\,(xe^x)=0$ hanya jika $c_1 =0$, $c_2 =0$

Latihan soal:

1. Tunjukkan bahwa himpunan fungsi berikut bebas linier!

(a) $\sin x, \cos x$ (b) e^x, xe^x

(c) $x\sin x, \sin x$ (d) $e^x \sin x, e^{-x} \sin x$

(e) $e^{2x} \sin x, e^{2x} \cos x$ (f) $e^x \sin x, e^{-x} \sin x$

2. Tunjukkan bahwa himpunan fungsi berikut tak-bebas linier!

(a) $2x, -x$ (b) $x^2, 4x^2$

4.3 Determinan Wronski

Himpunan fungsi $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ (yang mempunyai turunan) adalah bebas linier pada suatu selang jika determinan:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \ldots & y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Determinan tersebut dinamakan determinan Wronski.

Contoh:

Tentukan determinan Wronski (Wronskian) untuk fungsi-fungsi berikut:

$(a)\ \ \{sin\ 3x, cos\ 3x\}$ $\qquad\qquad$ $(b)\ \ \{x, x^2, x^3\}$

Penyelesaian:

$(a)\ \ W(x) = \begin{vmatrix} sin\ 3x & cos\ 3x \\ 3cos\ 3x & -3sin\ 3x \end{vmatrix} = -3sin^2 3x - 3cos^2 3x = -3$

$(b)\ \ W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 12x^2 + 0 + 2x^3 - 0 - 6x^3 - 6x^3 = 2x^3$

Contoh:

Tunjukkan himpunan fungsi $\{1 - x, 1 + x, 1 - 3x\}$ adalah takbebas linier untuk semua nilai x!

Penyelesaian:

(a) kita dapat menunjukkan dengan memilih konstanta c1, c2, c3 yang tidak semuanya nol sehingga c1(1-x)+c2(1+x)+c3(1-3x)=0, jika ditentukan c1=1, c2=-1, c3=0 maka 1-x-1-x+0=0, sehingga himpunan fungsi $\{1 - x, 1 + x, 1 - 3x\}$ adalah takbebas linier.

(b) kita juga dapat menghitung determinan Wronski-nya, yaitu:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 - x & 1 + x & 1 - 3x \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

terbukti bahwa Wronskian =0 berarti himpunan fungsi $\{1 - x, 1 + x, 1 - 3x\}$ tak bebas linir untuk semua x

Soal Latihan:

1. Buktikan himpunan fungsi berikut bebas linier!
   $(a)\ e^x cos\ x, e^x sin\ x$
   $(b)\ x, xe^x, x^2 e^x$
   $(c)\ cos\ (2x), xcos\ (2x)$
2. Misalkan $y1(x)$ dan $y2(x)$ adalah penyelesaian $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$
   (a) Buktikan bahwa determinan Wronskinya $W = y_1 y_2' + y_2 y_1' = ce^{\int -Pdx}$
   (b) Tentukan nilai c, sehingga $y1(x)$ dan $y2(x)$ bebas linier

4.4 Prinsip Superposisi

Jika $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ adalah n penyelesaian bebas linier dari persamaan linier orde-n, $\Phi(D)y=0$ maka solusi umumnya:

$$\mathbf{y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)}$$

dgn c_1, c_2, …, c_n = konstanta.

Contoh:

Jika $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ adalah solusi persamaan diferensial homogen $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ maka kombinsi linier $c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$ juga solusi persamaan diferensial.

Bukti:

$y_1(x)$ dan $y_2(x)$ solusi $y'' + Py' + Qy = 0$ maka

$$y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0$$

dan

$$y_2'' + Py_2' + Qy_2 = 0$$

dari solusi $y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$, maka:

$$y' = c_1\, y_1' + c_2\, y_2'$$

$$y'' = c_1\, y_1'' + c_2\, y_2''$$

substitusi ke persamaan diferensial diperoleh:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

$$c_1\, y_1'' + c_2\, y_2'' + P(c_1\, y_1' + c_2\, y_2') + Q(c_1\, y_1 + c_2\, y_2) = 0$$

$$c_1\, y_1'' + c_2\, y_2'' + c_1\, Py_1' + c_2P\, y_2' + c_1Q\, y_1 + c_2Q\, y_2 = 0$$

$$c_1(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + c_2(y_2'' + Py_2' + Qy_2) = 0$$

$$c_1.0 + c_2.0 = 0$$

4.5 Penyelesaian PD Linier Homogen dengan koefisien konstanta

PD Linier Homogen orde-2 dengan koefisien konstan adalah:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad a, b, c = konstanta$$

dimisalkan solusi umum PD: $y = e^{mx}$ sehingga jika kita substitusi ke dalam PD maka:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$\leftrightarrow\ am^2e^{mx} + bm\, e^{mx} + ce^{mx} = 0$$

$$\leftrightarrow (am^2 + bm + c)\, e^{mx} = 0$$

Jadi $\boldsymbol{y = e^{mx}}$ menjadi solusi PD jika $am^2 + bm + c = 0$ (disebut **Persamaan Karakteristik**)

Akar-akar Persamaan Karakteristik adalah:

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Terdapat tiga kemungkinan akar-akar nilai m pada Persamaan Ciri:

1. Jika $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0$, maka $m_{1,2}$ adalah dua akar Real yang berbeda dengan $m_{1,2} \in$ R maka solusi umumnya:
$$\boldsymbol{y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}}$$
2. Jika $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$, maka $m_1 = m_2$ dengan $m_{1,2} \in$ R, maka solusi umumnya:
$$\boldsymbol{y = c_1 e^{mx} + c_2 x\, e^{mx}}$$
3. Jika $\sqrt{b^2 - 4ac} < 0$, maka $m_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ dengan $\alpha, \beta \in$ R maka solusi umumnya:
$$\boldsymbol{y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2\, e^{(\alpha - i\beta)x}}$$
dengan rumus Euler , yaitu $\boldsymbol{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$ maka bentuk trigonometri rumus dapat ditentukan:
$$\boldsymbol{y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 x\, e^{(\alpha - i\beta)x}}$$
$$\boldsymbol{= c_1 e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) + c_2 e^{\alpha x}(-\cos \beta x - i \sin \beta x);\ -\cos \beta x = \cos \beta x}$$
$$\boldsymbol{= (c_1 + c_2) e^{\alpha x}(\cos \beta x) + i(c_1 - c_2) e^{\alpha x}(\sin \beta x)}$$
$$\boldsymbol{= A e^{\alpha x} \cos \beta x + B e^{\alpha x} \sin \beta x \quad , A, B \in konstanta\ bil. kompleks}$$

Contoh:

Tentukan solusi umum persamaan difrensial berikut:

$$y'' + 5y' - 6y = 0$$

Penyelesaian:

Akar-akar Persamaan Karakteristik pada PD di atas adalah:

$$m^2 + 5m - 6 = 0$$
$$(m - 1)(m + 6) = 0$$
$$m_1 = 1\ dan\ m_2 = -6$$

dua solusi bebas linier PD adalah :

$$y_1(x) = e^x \text{ dan } y_2(x) = e^{-6x}$$

Jadi solusi umum PD adalah:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2\, e^{-6x}$$

Penyelesaian menggunakan Program MATLAB:

```
>> syms x
>> y=dsolve('D2y+5*Dy-6*y=0')
y =C2*exp(t) + C4/exp(6*t)
```

Contoh:

Selesaikan persamaan diferensial berikut:

$$y'' - y = 0 \ , y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Penyelesaian:

Akar-akar Persamaan Karakteristik pada PD di atas adalah:

$$m^2 - 1 = 0$$

$$(m-1)(m+1) = 0$$

$$m_1 = 1\ ;\ \ m_2 = -1$$

dua solusi bebas linier PD adalah :

$$y_1(x) = e^x\ ;\ \ y_2(x) = e^{-x}$$

Jadi solusi umum PD adalah:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2\, e^{-x}$$

masalah nilai awal $y(0) = 1, y'(0) = 0$

$$y(0) = 1\ \rightarrow c_1\ + c_2\ = 1$$

$$y'(0) = 0\ \rightarrow c_1 - c_2\ = 0$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\ , \qquad c_2\ = \frac{1}{2}$$

Jadi solusi khusus PD adalah:

$$y(x) = \frac{1}{2}\, e^x + \frac{1}{2}\, e^{-x}$$

Penyelesaian menggunakan Program MATLAB:

```
>> syms x
>> y=dsolve('D2y-y=0','y(0)=0','Dy(0)=1')
y =exp(t)/2 - 1/(2*exp(t))
```

Contoh:

Tentukan penyelesaian umum PD

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Penyelesaian:
Akar-akar Persamaan Karakteristik pada PD di atas adalah:

$$m^2 + 4m + 4 = 0$$
$$(m + 2)(m + 2) = 0$$
$$m_{12} = -2$$

Diperoleh akar-akar yang sama, sehingga solusi umum PD mestinya adalah:

$$y(x) = c_1 e^{-2x}$$

karena PD orde 2 akan memberikan dua solusi bebas linier dengan dua variabel konstanta maka solusi kedua dapat ditentukan dengan metode **Reduksi Orde PD** , yaitu:
bentuk umum PD homogen orde-2:

$$y'' + ay' + by = 0$$

akar-akar persamaan karakteristik jika $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$, $m_1 = m_2 = -\frac{b}{2a}$

satu solusi PD: $y(x) = c_1 e^{-\frac{b}{2a}x}$
bentuk persamaan *reduksi orde* yaitu:

$$y = v(x)e^{-\frac{b}{2a}x}$$
$$y' = v'(x)\, e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}\, v(x)\, e^{-\frac{b}{2a}x}$$
$$y'' = \left(v''(x) - \frac{b}{a}\, v'(x) + \frac{b^2}{4a^2}\, v(x) \right) e^{-\frac{b}{2a}x}$$

substitusi y, y', y'' ke PD $y'' + ay' + by = 0$, maka:

$$a\left(v''(x) - \frac{b}{a}\, v'(x) + \frac{b^2}{4a^2}\, v(x) \right) e^{-\frac{b}{2a}x} + b\left(v'(x) - \frac{b}{2a}\, v(x) \right) e^{-\frac{b}{2a}x} + cv(x)e^{-\frac{b}{2a}x} = 0$$

kedua ruas dibagi $e^{-\frac{b}{2a}x}$, maka:

$$a\left(v''(x) - \frac{b}{a}\, v'(x) + \frac{b^2}{4a^2}\, v(x) \right) + b\left(v'(x)\, e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}\, v(x) \right) + cv(x) = 0$$
$$\leftrightarrow \;\; av''(x) - \left(\frac{b^2}{4a} - c \right) v(x) = 0$$
$$\leftrightarrow \;\; av''(x) - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) v(x) = 0$$

karena $b^2 - 4ac = 0$ maka persmaan menjadi:

$$v''(x) = 0$$

sehingga:

$$v(x) = c_1 + c_2 x$$

jadi satu solusi lain $y(x)$ adalah $y(x) = v(x)e^{-\frac{b}{2a}x} = (c_1 x + c_2)e^{-\frac{b}{2a}x}$

karena satu solusi PD telah diketahui yaitu $y(x) = c_1 e^{-\frac{b}{2a}x}$

maka solusi lain yang dimaksud adalah $y(x) = c_2 x e^{-\frac{b}{2a}x}$

untuk kasus contoh soal di atas penyelesaian umum PD menjadi:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_1 x e^{-2x}$$

Contoh:

Tentukan penyelesaian umum PD berikut:

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

Penyelesaian:

akar-akar persamaan karakteristik:

$$m^2 + 2m + 4 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

karena α=-1 dan β=$\sqrt{3}$ maka penyelesaian umum PD:

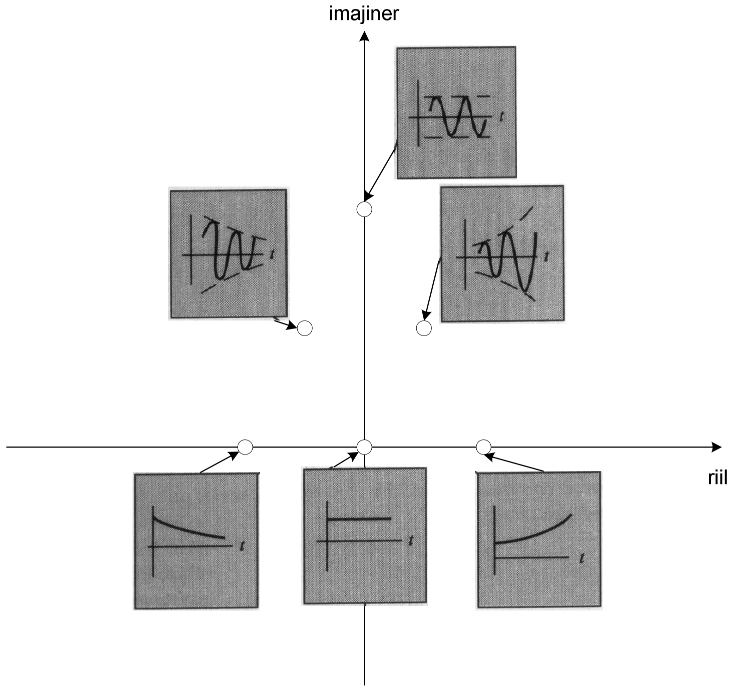
$$\boldsymbol{y = Ae^{-x}\cos\sqrt{3}x + Be^{-x}\sin\sqrt{3}x}$$

Latihan Soal:

Selesaikan PD berikut:

1. $y'' = 0$
2. $y'' - y' = 0$
3. $y'' - 3y' + 2y = 0$
4. $y'' + 2y' + y = 0$
5. $4y'' - 4y' + y = 0$
6. $y'' - 4y' + 7y = 0$
7. $3y'' + 4y' + 9y = 0$
8. $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$
9. $4y'' - 4y' - 3y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$
10. $y'' - 4y' + 13y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$
11. $y'' + 2y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$
12. $Tentukan\ y_2\ dengan\ metode\ reduksi\ orde\ pada\ y'' - 2y' + y = 0$
    $jika\ \ y_1 = e^x!$
13. $Tentukan\ y_2\ dengan\ metode\ reduksi\ orde\ pada\ y'' + 10y' + 25y = 0$
    $jika\ \ y_1 = e^{-5x}!$

14. $Pada\ Gambar\ 19\ digambarkan\ solusi\ \ \ {}'alamiah\ kualitatif{}'$
$(qualitative\ nature\ of\ solution) dari\ \ PD\colon\ ay'' + by' + cy = 0$,
$r_1 dan\ r_2\ adalah\ akar - akar\ pers.karakteristik$
$Solusi\ berdasarkan\ akar\ pers.karakteristik\ terbagi\ atas\ 8\ kasus\ berbeda,$
$yaitu$:
(1). $r_1 < 0\ dan\ r_2 < 0$
(2). $r_1 < 0\ dan\ r_2 = 0$
(3). $r_1 = 0\ dan\ r_2 = 0$
(4). $r_1 = 0\ dan\ r_2 > 0$
(5). $r_1 > 0\ dan\ r_2 > 0$
(6). $r_1, r_2 = \alpha \pm i\beta\ \ (\alpha < 0)$
(7). $r_1, r_2 = \alpha \pm i\beta\ \ (\alpha = 0)$
(8). $r_1, r_2 = \alpha \pm i\beta\ \ (\alpha > 0)$
(a). $kasus\ yang\ manakah\ untuk\ t \to \infty\ solusi\ akan\ mendekati\ nol$?
(b). $kasus\ yang\ manakah\ untuk\ t \to \infty\ solusi\ akan\ mendekati\ takberhingga$?
(c). $kasus\ yang\ manakah\ untuk\ t \to \infty\ solusi\ :\ \ osilasi\ teredam$?
(d). $kasus\ yang\ manakah\ untuk\ t \to \infty\ solusi\ :\ \ osilasi\ tak\ teredam$?



Gambar 1 Solusi Alamiah Kualitatif berdasarkan Akar Pers. Karakteristik

4.6 PD Linier Homogen orde-2: Persamaan Cauchy-Euler

Bentuk umum persamaan Cauchy-Euler-orde2 adalah:

$$(ax+b)^2y''+a_1(ax+b)y'+a_0y=0$$

$a\neq 0, b, a_1, a_0 \ = konstanta\ khusus$

Penyelesaian persamaan Cauchy-Euler-orde2 adalah:

misal solusi PD $y=e^{rt}$ dengan $t=ln(ax+b)$, maka y', y'' adalah:

$$y'=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}=re^{rt}.\frac{a}{ax+b}$$

$$y''=\frac{d^2y}{dt^2}.\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dt}.\frac{d^2t}{dx^2}=\frac{a^2r^2e^{rt}}{(ax+b)^2}-\frac{a^2re^{rt}}{(ax+b)^2}$$

Substitusi y, y', y'' pada PD didapatkan :

$$(ax+b)^2y''+a_1(ax+b)y'+a_0y=0$$

$$(ax+b)^2\left[\frac{a^2r^2e^{rt}}{(ax+b)^2}-\frac{a^2re^{rt}}{(ax+b)^2}\right]+a_1(ax+b)\left[re^{rt}.\frac{a}{ax+b}\right]+a_0e^{rt}=0$$

$$[a^2r^2e^{rt}-a^2re^{rt}]+a_1are^{rt}+a_0e^{rt}=0$$

$$\left[a^2r^2-a^2r \quad +a_1ar+a_0\right]e^{rt}=0$$

$$[a^2r^2+(a_1a-a^2)r+a_0]e^{rt}=0$$

sehingga persamaan karaktristik-nya:

$$a^2r^2+(a_1a-a^2)r+a_0=0$$

Akar-akar Persamaan Karakteristik adalah:

$$r_{1,2}=\frac{-(a_1a-a^2)\pm\sqrt{(a_1a-a^2)^2-4a^2a_0}}{2a^2}$$

Terdapat tiga kemungkinan akar-akar nilai m pada Persamaan Ciri:

1. Jika $\sqrt{(a_1a-a^2)^2-4a^2a_0}>0$, maka $r_{1,2}$ adalah dua akar Real yang berbeda maka solusi umumnya:

$$\boldsymbol{y=c_1(ax+b)^{r_1}+c_2(ax+b)^{r_2}}$$

2. Jika $\sqrt{(a_1a-a^2)^2-4a^2a_0}>0=0$, maka $r_1=r_2$ maka solusi umumnya:

$$\boldsymbol{y=(ax+b)^{r_1}[c_1+c_2ln(ax+b)]}$$

3. Jika $\sqrt{(a_1a-a^2)^2-4a^2a_0}<0$, maka $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ maka solusi umumnya:

$$\boldsymbol{y=(ax+b)^{\alpha}\left[c_1cos\big(\beta ln(ax+b)\big)+c_2sin\ (\beta ln(ax+b))\right]}$$

Contoh:

Tentukan persamaan karakterisik pada persamaan Cauchy-euler jika a=1 dan b=0!

Penyelesaian:

persamaan Cauchy-Euler: $(ax+b)^2y'' + a_1(ax+b)y' + a_0y = 0$

jika a=1 dan b=0, persamaan menjadi:

$$(ax)^2y'' + a_1(ax)y' + a_0y = 0$$

persamaan karakteristik:

$$a^2r^2 + (a_1a - a^2)r + a_0 = 0$$
$$a^2r^2 + (a_1a - 1)r + a_0 = 0$$

Contoh:

Tentukan penyelesaian PD berikut:

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$$

Penyelesaian:

misal solusi umum PD $y = e^{rt}$ dengan $t = lnx$

persamaan karakteristik: $r^2 - 5r + 6 = 0, r_1 = 2, r_2 = 3$

penyelesaian umum PD:

$$y = c_1x^2 + c_2x^3$$

Contoh:

Tentukan penyelesaian PD berikut:

$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$$

Penyelesaian:

misal solusi umum PD $y = e^{rt}$ dengan $t = lnx$

persamaan karakteristik: $r^2 + 2r + 1 = 0, r_{1,2} = -1$

penyelesaian umum PD:

$$y = x^{-1}[c_1 + c_2ln(x)]$$

Contoh:

Tentukan penyelesaian PD berikut:

$$3(2x-5)y'' - (2x-5)y' + 2y = 0$$

Penyelesaian:

misal solusi umum PD $y = e^{rt}$ dengan $t = ln(2x-5)$

persamaan karakteristik: $6r^2 - 7r + 1 = 0, r_1 = 1, r_2 = 6$

penyelesaian umum PD:

$$y = c_1(2x-5) + c_2(2x-5)^{1/6}$$

Latihan Soal:

Tentukan solusi umum PD Cauchy-Euler berikut:

1. $y'' - \frac{1}{x}y' - \frac{3}{x^2}y = 0$
2. $x^2y'' + xy' - y = 0$
3. $x^2y'' - 7y' + 16y = 0$
4. $4x^2y'' + 12xy' + 3y = 0$
5. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$
6. $x^2y'' + 1{,}25y = 0$
7. $(x+2)^2y'' - (x+2)y' + y = 0$
8. $(x+1)^2y'' + 5(x+1)y' + 3y = 0$
9. $(2x-3)^2y'' + 7(2x-3)y' + 4y = 0$
10. $(1-x)^2y'' - (1-x)y' + y = 0$
11. $2(1-2x)^2y'' + 11(2x-1)y' - 2y = 0$

4.7 PD Linier Homogen orde-n dengan Koefisien Konstan

Persamaan Diferensial Linier Homogen orde-n dengan koefisien konstan mempunyai bentuk umum:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y \quad = 0 \;, \qquad a_n \neq 0$$

Jika $y_1, y_2, \ldots, y_n$ adalah penyelesaian khusus PD Linier homogen, maka kombinasi liniernya juga penyelesaian PD Linier homogen, dirumuskan:

$$y = k_1 y_1 + k_2\, y_2 + \ \ldots + k_n y_n = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i \ ,\ k_1, k_2\,, \ldots, k_n \ = konstanta$$

Penyelesaian PD Linier homogen orde-n dengan substitusi $y = e^{rx}$ sehingga didapatkan persamaan karakteristik:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ \ldots + a_1 r \quad + a_0 = 0$$

Untuk selanjutnya dengan teknik faktorisasi dapat ditentukan akar-akar persamaan karakteristik, yaitu:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ \ldots + a_1 r \quad + a_0 = a_n(r - r_1)(r - r_2)\ldots(r - r_n) = 0$$

Akar-akar persamaan karakteristik di atas dapat bernilai sama atau disebut akar rangkap (*multiplicity*). Dua kasus akar rangkap untuk solusi PD Linier Homegen orde-n, yaitu:

Kasus I. Jika Akar rangkap adalah r=bilangan riil, terdapat k penyelesaian bebas linier.

k solusi bebas linier:

$$\boldsymbol{e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{k-1}e^{rx}} \;;\; \boldsymbol{k \geq 1}$$

solusi umumnya:

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} + \dots + c_k x^{k-1} e^{rx}}$$

$$c_k = \ konstanta\ ke - k$$

Kasus II. Jika Akar rangkap adalah r=bilangan komplek (r=α±iβ). terdapat k penyelesaian bebas linier.

k solusi bebas linier:

$$\boldsymbol{e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,}$$

$$\boldsymbol{e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x}$$

solusi umumnya:

$$\boldsymbol{y = e^{\alpha x}\left[(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x) + x(c_3\cos\beta x + c_4\sin\beta x) + \cdots \right.}$$
$$\boldsymbol{\left. + x^{k-1}(c_{k-1}\cos\beta x + c_k\sin\beta x)\right]}$$

Contoh:

Selesaikan persamaan diferensial berikut:

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - y'' = 0$$

Penyelesaian:

persamaan karakteristik:

$$r^5 - 3r^4 + 3r^3 - r^2 = 0$$

akar-akar persamaan karakteristik $r_1 = r_2 = 0, r_3 = r_4 = r_5 = 1$

solusi bebas linier:

$$e^{0x}, xe^{0x}, e^x, xe^x, x^2e^x$$

Jadi solusi umumnya:

$$y = c_1 + c_2 x \quad + (c_3 + c_4 x + c_5 x^2)e^x$$

Contoh:

Tentukan penyelesaian PD berikut:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

persamaan karakteristik:

$$r^3 - 2r^2 + r + 2 = 0$$

akar-akar persamaan karakteristik $r_1 = -1, r_2 = 1, r_3 = 2$

solusi bebas linier:

$$e^{-x}, e^{x}, e^{2x}$$

Jadi solusi umumnya:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}$$

Contoh:

Tentukan penyelesaian PD berikut:

$$y^{(4)} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25 = 0$$

persamaan karakteristik:

$$r^4 - 4r^3 + 14r^2 - 20r + 25 = 0$$

akar-akar persamaan karakteristik $r_1 = r_2 = 1 + 2i, r_3 = r_4 = 1 - 2i$

solusi bebas linier:

$$e^{x}cos(2x), xe^{x}cos(2x), e^{x}sin(2x), xe^{x}sin(2x)$$

Jadi solusi umumnya:

$$y = c_1 e^{x}cos(2x) + c_2 xe^{x}cos(2x) + c_3 e^{x}sin(2x) + c_4 xe^{x}sin(2x)$$

Latihan Soal:

Tentukan penyelesaian umum PD berikut:

1. $y''' - y' = 0$
2. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$
3. $y^{(4)} - y = 0$
4. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
5. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
6. $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$

Untuk soal berikut tentukan solusi PD dengan syarat awal berikut:

7. $y''' - y' = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 9$
8. $y^{(4)} - y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 2$
9. $y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0, y(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = -5, \quad y'''(0) = -1$
10. $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$

4.8 Persamaan Diferensial Linier Tak Homogen

Prosedur umum penyelesaian PD Liner Tak Homogen adalah

Langkah I : Menentukan solusi umum PD Linier Homogen, $y_h(x)$

Langkah II : Menentukan solusi umum PD Linier Tak-Homogen, $y_p(x)$

Langkah III : Menentukan solusi umum PD, $y = y_h(x) + y_p(x)$

Contoh:

Tentukan solusi umum PD berikut:

$$y'' + y = 1$$

Langkah I : Menentukan solusi umum PD Linier Homogen.

$$y'' + y = 0$$

solusi umum: $y_h = c_1 cos\, x + c_2 sin\, x$

Langkah II : Menentukan solusi umum PD Linier Tak-Homogen.

$$y'' + y = 1$$

solusi umum: $y_p = 1$

Langkah III : $y = y_h(x) + y_p(x) = c_1 cos\, x + c_2 sin\, x + 1$

4.8.1 Metode Koefisien Tak Tentu

Awalnya metode ini diterapkan pada PD linier tak homogen orde-2 yang berbentuk

$$ay'' + by' + cy = r(x), \qquad a, b, c = konstanta$$

selanjutnya metode ini juga berlaku untuk orde yang lebih tinggi.

Kunci metode ini adalah y_p adalah suatu ekspresi yang mirip dengan r(x), yang terdapat koefisien-koefisien yang tidak diketahui yang dapat ditentukan dengan mensubstitusikan y_p pada persamaan.

Aturan untuk Metode Koefisien Tak Tentu

A. **Aturan Dasar**. Jika r(x) adalah salah satu fungsi yang ada dalam Tabel 3.1, pilih fungsi y_p yang bersesuaian dan tentukan koefisien tak tentunya dengan mensubstitusikan y_p pada persamaan.

B. **Aturan Modifikasi.** Jika r(x) sama dengan solusi PD homogen, kalikan y_p yang bersesuaian dalam tabel dengan x (atau x^2 jika r(x) sama dengan solusi akar ganda PD Homogen)

C. **Aturan Penjumlahan.** Jika r(x) adalah jumlah fungsi-fungsi yang terdapat dalam Tabel pada kolom pertama, y_p adalah jumlah fungsi pada baris yang bersesuaian

Tabel 1 Metode Koefisien Tak Tentu

Suku-suku dalam r(x)	**Pilihan untuk y_p**
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
$Kx^n (n = 0, 1, \dots)$	$K_n x^n + K_{n-1} x^{n-1} + \cdots + K_1 x + K_0$
$k\cos\omega x \; atau \; k\sin\omega x$	$K\cos\omega x \; + \; M\sin\omega x$

Kesimpulan:

- Metode Koefisisen Taktentu digunakan penyelesaian khusus PD linier takhomogen dengan koefisien konstanta
- Untuk dapat menentukan pemisalan yang sesuai harus dicari terlebih dahulu solusi persamaan homogennya.
- Metode Koefisisen Taktentu hanya dapat digunakan jika fungsi f(x) di ruas kanan adalah berupa polinom, fungsi trigono, fungsi eksponen atau penjumlahan/perkalian dari ketiga fungsi kolom pertama dalam Tabel 1. Contoh: PD $y'' + y = \tan x$ tidak dapat diselesaikan dengan metode koefisien taktentu karena $\tan x$ bukan termasuk ketiga fungsi dalam Tabel 1

Contoh Penerapan Aturan Dasar

Selesaikan PD takhomogen berikut:

$$y'' + 4y = 8x^2$$

Penyelesaian:

Langkah 1. Menentukan solusi PD homogen $y'' + 4y = 0$

persamaan karakteritik: $m^2 + 4 = 0$

akar-akar persamaan karakteristik: $m_1 = 2i$, $m_2 = -2i$

solusi umum $y_h = A\cos 2x + B\sin 2x$

Langkah 2. Menentukan solusi PD Tak Homogen $y'' + 4y = 8x^2$

$f(x) = 8x^2$ sehingga dari Tabel 1, $y_p = K_2 x^2 + K_1 x \quad + K_0$

$$y'_p = 2K_2 x + K_1$$

$$y''_p = 2K_2$$

substitusi y_p, y'_p, y''_p ke persamaan didapatkan:

$$2K_2 + 4(K_2 x^2 + K_1 x \quad + K_0) = 8x^2$$

dengan menyamakan koefisien-koefisien yang berpangkat sama diperoleh:

$$4K_2 = 8$$
$$4K_1 = 0$$
$$2K_2 + 4K_0 = 0$$

perolehan konstanta:

$$K_2 = 2, \qquad K_0 = -1, \qquad K_1 = 0$$

solusi umum PD takhomogen:

$$y_p = 2x^2 - 1$$

Langkah 3. Menentukan solusi PD

$$y = y_h(x) + y_p(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + 2x^2 - 1$$

Contoh penerapan Aturan Modifikasi

Tentukan solusi PD berikut:

$$\boldsymbol{y'' - 3y' + 2y = e^x}$$

Penyelesaian:

Langkah 1. Menentukan solusi PD homogen $\boldsymbol{y'' - 3y' + 2y = 0}$

persamaan karakteritik: $m^2 - 3m + 2 = 0$

akar-akar persamaan karakteristik: $m_1 = 1$, $m_2 = 2$

solusi umum $y_h = c_1\boldsymbol{e^x} + c_2\boldsymbol{e^{2x}}$

Langkah 2. Menentukan solusi PD Tak Homogen $\boldsymbol{y'' - 3y' + 2y = e^x}$

$f(x) = \boldsymbol{e^x}$ sehingga dari Tabel 1, $y_p = c\boldsymbol{e^x}$

karena $f(x) = \boldsymbol{e^x}$ adalah solusi PD homogen pada Langkah 1 maka sesuai Aturan B, $y_p = cx\boldsymbol{e^x}$

sehingga $y'_p = c\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{cxe^x}$, $y''_p = 2c\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{cxe^x}$

substitusi y_p, y'_p, y''_p ke persamaan didapatkan:

$$2c\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{cxe^x} - 3(c\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{cxe^x}) + 2(cx\boldsymbol{e^x}) = \boldsymbol{e^x}$$

dengan menyamakan koefisien-koefisien yang berpangkat sama diperoleh konstanta c=-1

solusi umum PD takhomogen:

$$y_p = -xe^x$$

Langkah 3. Menentukan solusi PD

$$y = y_h(x) + y_p(x) = c_1\boldsymbol{e^x} + c_2\boldsymbol{e^{2x}} - xe^x$$

Contoh Penerapan Aturan Penjumlahan

Tentukan penyelesaian umum PD berikut:

$$\boldsymbol{y'' - 2y' + y = e^x + x}$$

Penyelesaian:

Langkah 1. Menentukan solusi PD homogen $\boldsymbol{y'' - 2y' + y = 0}$

persamaan karakteritik: $m^2 - 2m + 1 = 0$

akar-akar persamaan karakteristik: $m_1 = m_2 = 1$

solusi umum $y_h = c_1\boldsymbol{e^x} + c_2x\boldsymbol{e^x}$

Langkah 2. Menentukan solusi PD Tak Homogen $\boldsymbol{y'' - 2y' + y = e^x + x}$

$f(x) = \boldsymbol{e^x + x}$ sesuai Tabel 1, $y_p = c_1\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{c_2x} + \boldsymbol{c_3}$

suku pada $f(x)$ yaitu $\boldsymbol{e^x}$ adalah solusi ganda PD homogen solusi umum PD homogen menjadi $y_p = c_1x^2\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{c_2x} + \boldsymbol{c_3}$

sehingga $y'_p = 2c_1x\boldsymbol{e^x} + c_1x^2\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{c_2}$,

$y''_p = 2c_1\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{2}c_1\boldsymbol{x}\boldsymbol{e^x} + 2c_1x\boldsymbol{e^x} + c_1x^2\boldsymbol{e^x}$

substitusi y_p, y'_p, y''_p ke persamaan didapatkan:

$$2c_1\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{4}c_1\boldsymbol{xe^x} + c_1x^2\boldsymbol{e^x} - 2(2c_1x\boldsymbol{e^x} + c_1x^2\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{c_2}) + c_1x^2\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{c_2x} + \boldsymbol{c_3} = \boldsymbol{e^x + x}$$

$$\leftrightarrow \quad 2c_1\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{c_2x} - 2\boldsymbol{c_2} + \boldsymbol{c_3} = \boldsymbol{e^x + x}$$

dengan menyamakan koefisien-koefisien yang berpangkat sama diperoleh konstanta :

$c_1 = 1/2\,; c_2 = 1\,; c_3 = 2$

solusi umum PD takhomogen:

$$y_p = c_1x^2\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{c_2x} + \boldsymbol{c_3}$$
$$= \frac{1}{2}x^2\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{2}$$

Langkah 3. Menentukan solusi PD

$$y = y_h(x) + y_p(x) = c_1\boldsymbol{e^x} + c_2x\boldsymbol{e^x} + \frac{1}{2}x^2\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{2}$$

Tentukan penyelesaian PD berikut:

$$y'' + 2y' + 5y = 16e^x + sin\ 2x$$

Penyelesaian:

Langkah 1. Menentukan solusi PD homogen $y'' + 2y' + 5y = 0$

persamaan karakteritik: $m^2 + 2m + 5 = 0$

akar-akar persamaan karakteristik: $m_1 = -1 + 2i\ m_2 = -1\ - 2i$

solusi umum $y_h = \boldsymbol{e^{-x}}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

Langkah 2. Menentukan solusi PD Tak Homogen

$y'' + 2y' + 5y = 16e^x + \sin 2x$

$f(x) = 16e^x + \sin 2x$ sesuai Tabel 1,

$y_p = c\boldsymbol{e^x} + K\cos 2x + M\sin 2x$

substitusi y_p, y'_p, y''_p ke persamaan didapatkan:

$$8ce^x + (-4K + 4M + 5K)\cos 2x + (-4K - 4M + 5M)\sin 2x$$
$$= 16e^x + \sin 2x$$

dengan menyamakan koefisien-koefisien yang berpangkat sama diperoleh konstanta :

$c = 2\ \ ;\ \ K = -4/17\ \ ;\ \ M = 1/17$

solusi umum PD takhomogen:

$$y_p = c\boldsymbol{e^x} + K\cos 2x + M\sin 2x$$
$$= 2\boldsymbol{e^x} - \frac{4}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x$$

Langkah 3. Menentukan solusi PD

$$y = y_h(x) + y_p(x)$$
$$= \boldsymbol{e^{-x}}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 2\boldsymbol{e^x} - \frac{4}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x$$

Latihan soal

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial berikut:

1. $y'' + 4y' = x$
2. $y'' + y' - 2y = 3 - 6x$
3. $y'' + y = 6e^x + 3$
4. $y'' - y' - 2y = 6e^x$
5. $y'' + y' = 6\sin 2x$
6. $y'' - 3y' + 2y = e^x \sin x$
7. $y'' + y' = 2x,\qquad y(0) = 1,\qquad y'(0) = 2$
8. $y'' + y' - 2y = 2x,\qquad y(0) = 0,\qquad y'(0) = 1$
9. $y'' - 5y' + 6y = e^x(2x - 3),\qquad y(0) = 1,\qquad y'(0) = 3$

METODE KOEFISIEN TAKTENTU
PADA PD LINIER TAKHOMOGEN ORDE-2

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

Langkah 1. Menentukan solusi umum PD Homogen

$$ay'' + by' + cy = 0$$

solusi umum: $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

Langkah 2. Menentukan solusi PD TakHomogen

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

- lihat bentuk f(x) sesuaikan dengan Tabel 4.1 kolom-1 dan lihat kesamaan bentuk dg solusi PD homogen
- tentukan solusi umum: y_p = Tabel 4.1 kolom-2 sesuaikan dg f(x)-nya
- substitusi y_p, y'_p, y''_p pada PD takhomogen
- tentukan solusi khusus y_p

Langkah 3. Menentukan solusi umum PD TakHomogen

solusi umum: $y = y_h + y_p$

Gambar 2 Metode Koefisien Taktentu pada PD Linier Tak Homogen orde-2

4.8.2 Metode Variasi Parameter

Metode variasi parameter adalah metode untuk menentukan penyelesaian khusus PD linier takhomogen dengan koefisien variabel. Prinsip metode ini adalah mengubah variabel konstanta c_k dengan variasi parameter $v_k(x)$. Misal pada PD takhomogen orde-2 konstanta c_1 dan c_2 pada solusi umum PD homogen $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ diubah dengan variasi parameter $v_1(x)$ dan

$v_2(x)$ sehingga solusi khusus PD takhomogen $y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$. Metode ini lebih umum daripada metode koefisien taktentu.

Prinsip Metode Variasi Parameter
PADA PD LINIER TAKHOMOGEN ORDE-2

$$\boldsymbol{y'' - p(x)y' + q(x)y = r(x)}$$

$$\boldsymbol{y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{c_1 \to v_1(x)\,;\ c_2 \to v_2(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)}$$

Gambar 3 Prinsip Metode Variasi Parameter pada PD Linier TakHomogen orde-2

PD linier takhomogen orde-2 dengan koefisien variabel yang diselesaiakan dengan metode Variasi Paramatr mempunyai bentuk umum:

$$\boldsymbol{y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)}$$

Penyelesaian PD di atas adalah:

Langkah 1. Menentukan penyelesaian PD homogen.

Penyelesaian PD homogen persamaan di atas:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

Langkah 2. Menentukan penyelesaian PD takhomogen dengan metode variasi parameter.

- Menentukan solusi umum:

  $$\boldsymbol{y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)}$$

- Menentukan turunan $\boldsymbol{y_p}$ **:**

  $$y_p' = v_1'(x)y_1(x) + v_1(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2(x) + v_2(x)y_2'(x)$$

- Menentukan *persamaan syarat:*

$v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0$

sehingga

$y_p' = v_1(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2'(x)$

$y_p'' = v_1(x)y_1''(x) + v_1'(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2''(x) + v_2'(x)y_2'(x)$

- Substitusi y_p, y_p', y_p'' pada PD:

$$[v_1(x)y_1''(x) + v_1'(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2''(x) + v_2'(x)y_2'(x)] + p(x)[v_1(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2'(x)] + q(x)[v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)] = r(x)$$

$$v_1(x)[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)] + v_2(x)[y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)] + v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) = r(x)$$

karena $y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) = 0$ dan

$y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) = 0$

- maka hasil Substitusi y_p, y_p', y_p'' pada PD:

$v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) = r(x)$

- Menentukan $v_1(x)$ dan $v_2(x)$

$v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0$

$v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) = r(x)$

dari dua persamaan di atas maka:

$$\boldsymbol{v_1'(x)} = -\frac{\boldsymbol{y_2(x).r(x)}}{\boldsymbol{W}} \rightarrow \boldsymbol{v_1(x)} = \int -\frac{\boldsymbol{y_2(x).r(x)}}{\boldsymbol{W}}$$

$$\boldsymbol{v_2'(x)} = \frac{\boldsymbol{y_1(x).r(x)}}{\boldsymbol{W}} \rightarrow \boldsymbol{v_2(x)} = \int \frac{\boldsymbol{y_1(x).r(x)}}{\boldsymbol{W}}$$

$W = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)\,y_2(x)$ adalah Wronskian $y_1(x), y_2(x)$

jadi

$$\boldsymbol{y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)}$$

$$= \int -\frac{\boldsymbol{y_2(x).r(x)}}{\boldsymbol{W}} y_1(x) + \int \frac{\boldsymbol{y_1(x).r(x)}}{\boldsymbol{W}} y_2(x)$$

Langkah 3. solusi umum PD

$$y = y_h + \boldsymbol{y_p}$$

$$= c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$$

$$= c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \int -\frac{\boldsymbol{y_2(x).r(x)}}{\boldsymbol{W}} y_1(x) + \int \frac{\boldsymbol{y_1(x).r(x)}}{\boldsymbol{W}} y_2(x)$$

Contoh penerapan metode Variasi Parameter:
Tentukan penyelesaian umum PD berikut:

$$y'' + y' = sec\, x$$

Penyelesaian:
Langkah 1. Menentukan penyelesaian PD homogen.

$$y'' + y' = 0$$

persamaan karakteristik $m^2 + 1 = 0$, akar-akarnya $m_{1,2} = \pm i$

$$y_h = c_1 cos(x) + c_2 sin(x)$$

Langkah 2. Menentukan penyelesaian PD takhomogen dengan metode variasi parameter.

- solusi umum: $\boldsymbol{y_p = v_1(x)\, cos\, x + v_2(x)\, sin\, x}$
- persamaan syarat:
  $v_1'(x) y_1(x) + v_2'(x) y_2(x) = 0 \rightarrow v_1'(x)\, cos\, x + v_2'(x) sin\, x = 0$
- hasil Substitusi y_p, y_p', y_p'' pada PD:
  $v_1'(x) y_1'(x) + v_2'(x) y_2'(x) = r(x)$
  $-v_1'(x)\, sin\, x + v_2'(x) cos\, x = 0$
- Menentukan $v_1(x)$ dan $v_2(x)$
  $v_1'(x)\, cos\, x + v_2'(x) sin\, x = 0$
  $-v_1'(x)\, sin\, x + v_2'(x) cos\, x = 0$
  $v_1'(x) = -tan\, x \rightarrow v_1(x) = ln\, cos\, x$
  $v_2'(x) = 1 \qquad \rightarrow v_2(x) = x$
  jadi
  $y_p = v_1(x)\, cos\, x + v_2(x)\, sin\, x$
  $\quad = ln\, cos\, x\, cos\, x + x\, sin\, x$

Langkah 3. solusi umum PD

$$y = y_h + \boldsymbol{y_p} = c_1 cos(x) + c_2 sin(x) + ln\, cos\, x\, cos\, x + x\, sin\, x$$

Metode Variasi Parameter
pada PD Linier Takhomogen Orde-2
$$\boldsymbol{y'' - p(x)y' + q(x)y = r(x)}$$

Langkah 1. Menentukan penyelesaian PD homogen.

- $y'' - p(x)y' + q(x)y = 0$
- akar persamaan karakteristik
- $y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$

Langkah 2. Menentukan penyelesaian PD takhomogen dengan metode variasi parameter.

- Menentukan solusi umum:
  $\boldsymbol{y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)}$
- Menentukan *persamaan syarat:*
  $\boldsymbol{v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0}$
- Substitusi y_p, y_p', y_p'' pada PD:
  $\boldsymbol{v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) = r(x)}$
- Menentukan $v_1(x)$ dan $v_2(x)$

$$\boldsymbol{v_1'(x) = -\frac{y_2(x).r(x)}{W} \rightarrow v_1(x) = \int -\frac{y_2(x).r(x)}{W}}$$
$$\boldsymbol{v_2'(x) = \frac{y_1(x).r(x)}{W} \rightarrow v_2(x) = \int \frac{y_1(x).r(x)}{W}}$$
$$W = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x)$$

Langkah 3. Menentukan solusi PD Takhomogen.

$$y = y_h + \boldsymbol{y_p}$$
$$= c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \boldsymbol{v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)}$$

Gambar 4 Metode Variasi Parameter pada PD Linier TakHomogen orde-2

Latihan Soal

Tentukan penyelesaian PD tak homogen berikut dengan metode variasi parameter:

1. $y'' + y = 1$
2. $y'' - y' = x + 1$

3. $y'' + y' - 2y = 3 - 6x$
4. $y'' - y = 5e^{3x}$
5. $y'' + y = sin\, x$
6. $y'' + y = 6e^{x} + 3$
7. $y'' - y' - 2y = 6e^{x}$
8. $y'' + y' = 6\, sin\, 2x$
9. $y'' - 2y' + 2y = e^{x} sin\, x$