BAB II
PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA (PDB) ORDE SATU

Tujuan Instruksional:

- *Mampu memahami dan menyelesaikan PD orde-1 dg integrasi langsung, pemisahan variabel.*
- *Mampu memahami dan menyelesaikan Persamaan Diferensial Linier Homogen orde satu.*
- *Mampu memahami dan menyelesaikan Persamaan Bernaoulli.*
- *Mampu memahami dan menyelesaikan PD Eksak dan Tak-eksak.*

PDB orde satu dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

atau dalam bentuk

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

2.1 Penyelesaian PDB Orde Satu dgn Integrasi Langsung

Jika PDB dapat disusun dalam bentuk $\frac{dy}{dx} = f(x)$, maka persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan integrasi langsung.

Contoh

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 5$$

maka

$$y = \int (3x^2 - 6x + 5)dx = x^3 - 3x^2 + 5x + c$$

Penyelesaian menggunakan program MATLAB sebagai berikut:

```
>> y=dsolve('Dy= 3*x^2-6*x+5','x')
```

```
y= x^3-3*x^2+5*x+C1
```

Contoh:

$$x\frac{dy}{dx} = 5x^3 + 4$$

Maka

$$\frac{dy}{dx} = 5x^2 + \frac{4}{x}$$

sehingga

$$y = \frac{5}{3}x^3 + 4ln\,x + c$$

Penyelesaian menggunakan program MATLAB sebagai berikut:

```
>> y=dsolve('x*Dy= 5*x^3  + 4','x')
y=5/3*x^3+4*log(x)+C1
```

Nilai c tidak dapat ditentukan kecuali jika dalam persamaan di atas diberi keterangan syarat (sebuah nilai y untuk x tertentu). Solusi dengan nilai konstanta sembarang atau c disebut solusi umum/primitif, sedangkan solusi disebut khusus jika nilai c dapat dihitung.

Contoh:

Tentukan solusi khusus persamaan berikut jika y=3 untuk x=0:

$$e^x\frac{dy}{dx} = 4$$

Penyelesaian

$$e^x\frac{dy}{dx} = 4 \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = 4e^{-x}$$

maka

$$y = \int 4e^{-x}\,dx = -4e^{-x} + c$$

dengan mengetahui y=3 untuk x=0 dapat dihitung nilai c yaitu

$$y = -4e^{-x} + c \quad \leftrightarrow 3 = -4 + c \;\; ; c = 7$$

sehingga solusi khusus adalah:

$$y = \int 4e^{-x}\,dx = -4e^{-x} + 7$$

Penyelesaian menggunakan program MATLAB sebagai berikut:

```
>> y=dsolve('exp(x)*Dy=4','y(0)=3','x')
y=-4*exp(-x)+7
```

Latihan Soal:

Tentukan penyelesaian PD berikut:

1. $\frac{dy}{dx} = x - x^2$
2. $\frac{dy}{dx} = e^{3x} + 3x$
3. $\frac{dy}{dx} = 5x^2 + \frac{4}{x}$
4. $\frac{dy}{dx} = \sin x + x\cos x$
5. $\frac{dy}{dx} = 5x^2 + \frac{4\sin x}{x}$
6. $\frac{dy}{dx} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\sin x + x\cos x$

Tentukan solusi PD dengan masalah nilai awal sebagai berikut:

7. $\frac{dy}{dx} = -x^2\ ;\ y(0) = 1$
8. $\frac{dy}{dx} = e^{3x}; y(0) = 4$
9. $\frac{dy}{dx} = 5x^2 + \frac{4}{x}\ ;\ y(0) = 1$
10. $\frac{dy}{dx} = x\cos x\ ;\ y(0) = 1$
11. $\frac{dy}{dx} = \frac{4\sin x}{x}\ ;\ y(0) = 1$
12. $\frac{dy}{dx} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\sin x + x\cos x\ ;\ y(0) = 1$

2.2 Penyelesaian PDB Orde Satu Dengan Pemisahan Variabel

Jika persamaan diferensial berbentuk $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, yaitu persamaan yang ruas kanannya dapat dinyatakan sebagai perkalian atau pembagian fungsi x dan fungsi y, maka penyelesaian PD dengan cara memisahkan variabelnya sehingga faktor 'y' bisa kita kumpulkan dengan 'dy' dan faktor 'x' dengan 'dx'.

Contoh: Selesaikan PD berikut

(1) $\frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y)$

Pisahkan berdasarkan variabelnya untuk mendapatkan

$$\frac{1}{(1+y)}dy = (1+x)dx$$

jika kita integrasikan kedua ruas menjadi:

$$\int \frac{1}{(1+y)}dy = \int (1+x)dx$$

$$ln(1+y) = x + \frac{1}{2}x^2 + c$$

Penyelesaian menggunakan program MATLAB sebagai berikut:

```
>> y=dsolve('Dy  = (1+x)*(1+y)')
y=C3*exp(t*(x + 1)) - 1
```

(2) $9y\frac{dy}{dx} + 4x = 0$

dengan memisahkan variabelnya diperoleh:

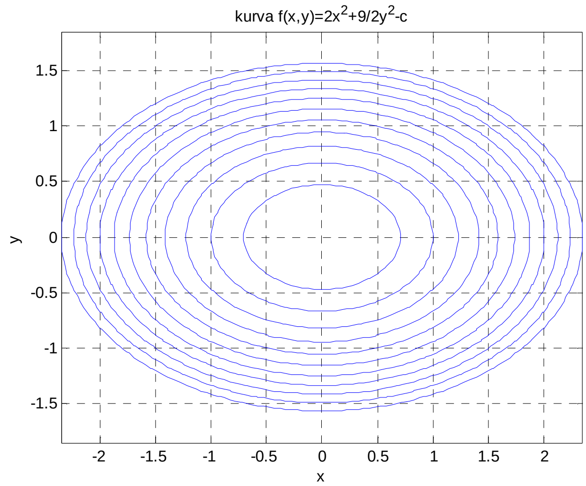
$$9ydy = -4xdx$$

selanjutnya tiap ruas diintegralkan dan didapatkan solusi:

$$\frac{9}{2}y^2 = -2x^2 + c$$

$$\frac{9}{2}y^2 + 2x^2 = c \quad \leftrightarrow \quad \frac{y^2}{2} + \frac{2x^2}{9} = \frac{c}{9}$$

$$y = \sqrt{\left(-\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{9}c\right)}$$



Gambar 1 Keluarga Kurva $\frac{9}{2}y^2 + 2x^2 = c$

Program MATLAB untuk Gambar 3 sebagai berikut:

```
clear all;
clc;
syms x y c
fx='(2*x^2)+(9/2*y^2)-c'
   for c=-11:11
    ezplot(eval(fx))
    axis square
    axis equal
       hold on
    grid on
end
title('kurva f(x,y)=2x^2+9/2y^2-c')
```

Latihan Soal:

Selesaikan persamaan diferensial berikut dengan memisahkan variabel-variabelnya:

1. $y' = \frac{x^2}{1-y^2}$
2. $y' = \frac{x^2}{y}$
3. $y' = -6xy$
4. $y' = x + xy$
5. $y' = \frac{y\cos x}{1+2y^2}$
6. $y' = 2x\sqrt{y-1}$
7. $y' = (cos^2 x)(cos^2 2y)$
8. $y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$
9. $y' = 2e^{-y} cosx$
10. $y' = 2(xy + y)$
11. $x(y^2 + 2)dx + y(x^2 + 1)dy = 0$
12. $(y^2 + 1)dx + (x^2 + 1)dy = 0$

2.3 Persamaan Homogen substitusi *y=vx*

Tinjau persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\ + 3y}{2x}$$

Persamaan di atas tidak dapat diselesaikan dengan cara memisahkan variabelnya. Dalam hal ini kita lakukan substitusi *y =vx*, dengan *v* adalah fungsi *x*. Sehingga penyelesaiannya:

dari *y* = *vx* dideferensialkan menjadi

$$\frac{dy}{dx} = v\ + x\ \frac{dv}{dx}$$

sehingga

$$\frac{x\ + 3y}{2x} = \frac{1\ +\ 3v}{2}$$

Persamaan sekarang menjadi:

$$v\ + x\ \frac{dv}{dx} = \frac{1\ +\ 3v}{2}$$

$$x\ \frac{dv}{dx} = \frac{1\ +\ 3v}{2} - v\ = \frac{1\ +\ v}{2}$$

$$\frac{2}{1+v}dv\ = \frac{1}{x}dx$$

kedua ruas diintegrasikan menjadi:

$$\int \frac{2}{1+v}dv\ = \int \frac{1}{x}dx$$

$$2ln(1\ +\ v)\ = lnx\ +\ c$$

$$(1+v)^2\ = c.x$$

substitusi *v=y/x* didapatkan

$$(1+\tfrac{y}{x})^2\ = c.x\ \text{ atau }\ (x+y)^2\ = c.x^3$$

Latihan Soal:

Selesaikan persamaan diferensial berikut dengan substitusi *y=vx*

$(a)\ \ (x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$

$(b)\ \ -ydx + \left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)dy = 0$

$(c)\ \ 2xyy' - y^2 + x^2 = 0$

$(d)\ \ y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{2x^3cos(x^2)}{y}$

2.4 Persamaan Diferensial Linier dalam bentuk $\frac{dy}{dx} + Py = Q$

Untuk PD yang berbentuk $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ dengan P dan Q fungsi x atau konstanta penyelesaiannya dapat diperoleh dengan mengalikan kedua ruas dengan faktor integrasi

$$e^{\int Pdx}$$

Contoh, selesaikan PD

$$\frac{dy}{dx} - y = x$$

Penyelesaian:

dari persamaan diperoleh P = -1 dan Q = x

faktor integrasinya $e^{\int Pdx} = e^{-x}$

jika kedua ruas persamaan dikalikan dengan e^{-x} maka:

$$e^{-x}(\frac{dy}{dx} - y) = e^{-x}(x)$$

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x}.y = e^{-x}.x$$

$$\frac{d}{dx}\{e^{-x}y\} = e^{-x}.x \rightarrow d\left\{e^{\int Pdx}.y\right\} = e^{\int Pdx}.x = e^{\int Pdx}.Q$$

sehingga penyelesaiannya

$$\int d(e^{-x}y) = \int e^{-x}.xdx$$

$$e^{-x}.y = -e^{-x}.x + \int e^{-x}dx = -e^{-x}.x - e^{-x} + c$$

$$y = -x - 1 + c\,/e^{-x}$$

dari contoh di atas jika faktor integrasi $e^{\int Pdx} = \mu$, maka PD linier orde satu bisa dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{d}{dx}(\mu.y) = \mu.Q$$

dengan bentuk di atas, penyelesaiannya menjadi:

$$\mu.y = \int \mu Q\,dx + c \quad atau \quad y.e^{\int Pdx} = \int e^{\int Pdx}.Q\,dx + c$$

Latihan soal:

Selesaikan PD linier berikut:

1. $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

2. $\frac{dy}{dx} + 2y = 3e^{x}$
3. $\frac{dy}{dx} - y = e^{3x}$
4. $\frac{dy}{dx} + y = \sin x$
5. $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{1 + e^{2x}}$
6. $\frac{dy}{dx} + 2xy = x$
7. $\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = x^2$
8. $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2}$
9. $x \frac{dy}{dx} + y = 2x$
10. $\cos x \ \frac{dy}{dx} + y sin\, x = 1$
11. $x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 2$
12. $cosx \ \frac{dy}{dx} + ysinx = 1$
13. $(x + 2y^3) \frac{dy}{dx} = y$

Tentukan Solusi PD untuk masalah nilai awal berikut:

14. $\frac{dy}{dx} - y = 1 \, ; y(0) = 1$
15. $\frac{dy}{dx} + 2xy = x^3 \, ; y(10) = 1$
16. $\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x} y = x^3 ; y(1) = 4$
17. $\frac{dy}{dx} + 2xy = x \, ; y(0) = 1$
18. $(1 + e^{x}) \ \frac{dy}{dx} + e^{x} y = 0 \, ; y(0) = 1$

2.5 Persamaan Bernoulli berbentuk $\frac{dy}{dx} + Py = Q\,y^n$

PD yang berbentuk $\frac{dy}{dx} + Py = Q\,y^n$ dengan P dan Q fungsi x atau konstanta diselesaikan dengan cara:

Pertama, membagi kedua ruas dengan y^n sehingga persamaan menjadi

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P\,y^{1-n} = Q$$

Kedua, misalkanlah $z = y^{1-n}$ sehingga

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(y^{1-n})}{dx} \rightarrow \frac{dz}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

supaya suku pertama didapat $\frac{dz}{dx}$ maka persamaan pertama dikalikan (1-n) didapat:

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)P\,y^{1-n} = (1-n)Q$$

$$\frac{dz}{dx} + P_1.z = Q_1 \quad (PD\ Linier)$$

dengan *P1* dan *Q1* fungsi x atau konstanta. Persamaan terakhir dapat diselesaikan dengan faktor integrasi. Setelah diperoleh penyelesaian untuk z, dengn substitusi $z = y^{1-n}$ kita dapatkan y.

contoh: selesaikan PD berikut:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x.y^2$$

penyelesaian

kedua ruas dibagi y^2 menjadi

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{y^{-1}}{x} = x$$

misalkan $= y^{1-n}$, n=2 sehingga $z = y^{-1}$ dan $\frac{dz}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$

supaya suku pertama didapat $\frac{dz}{dx}$ maka persamaan dikali -1, diperoleh:

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{y^{-1}}{x} = -x$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -x \rightarrow PD\ Linier$$

faktor integral $e^{\int Pdx}$ dimana P = $-\frac{1}{x}$ maka

$$e^{\int P dx} = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-ln x} = e^{ln x^{-1}} = \frac{1}{x}$$

bentuk umum penyelesaian PD linier didapat:

$$\mu . y = \int e^{\int P dx} . Q\, dx + c$$

sehingga $\frac{1}{x} . z = \int \frac{1}{x} . (-x)\, dx + c \rightarrow \frac{z}{x} = -x + c$

$$z = cx - x^2$$

karena $z = y^{-1}$ maka $y^{-1} = cx - x^2 \rightarrow y = (cx - x^2)^{-1}$

Latihan soal:

Selesaiakan PD Bernoulli berikut:

1. $\frac{dy}{dx} + y = x . y^3$
2. $\frac{dy}{dx} + y = e^x . y^4$
3. $2 \frac{dy}{dx} + y = (x - 1)\, y^3$

2.6 Persamaan Diferensial Eksak

PDB dalam bentuk:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

dikatakan eksak jika terdapat fungsi Q(x,y), sedemikian sehingga $\frac{\delta Q}{\delta x} = M(x, y)$ dan $\frac{\delta Q}{\delta y} = N(x, y)$. Dengan mengingat diferensial total dari fungsi Q(x, y), maka disimpulkan bahwa persamaan $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ eksak jika dan hanya jika:

$$\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x}$$

Langkah-langkah untuk menyelesaikan PD Eksak adalah sebagai berikut:

Langkah 1. Tuliskan PD dalam bentuk diferensial :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Langkah 2. Uji ke-eksak-an PD:

$$\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x}$$

Langkah 3. Jika eksak, integralkan *M* terhadap *x* atau *N* terhadap *y*. Misal dipilih *M*, maka :

$$Q(x,y) = \int M(x,y)dx \; + g(y)$$

Langkah 4. Turunkan *Q* terhadap *y* dan samakan hasilnya dengan N(x,y)

$$N(x,y) = \frac{\delta}{\delta y}\left(\int M(x,y)dx\right) + g'(y)$$

Langkah 5. Integralkan g'(y) untuk memperoleh g(y)

Langkah 6. Tuliskan penyelesaian umum dalam bentuk implisit:

$$Q(x, y) = C\ .$$

Langkah 7. Tentukan *C* jika diberikan kondisi awal tertentu.

Contoh: Selesaikan PDB $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-2y}{y^2-2x}$, y(0)=3

Penyelesaian:

Langkah 1. Bentuk diferensial PD adalah :

$$(x-2y)dx + (y^2-2x)dy \; = \; 0$$

Langkah 2. Uji ke- eksak-an PD ini:

$$\frac{\delta M}{\delta y} \; = \; -2\,; \frac{\delta N}{\delta x} \; = \; -2$$

Langkah 3. Misal dipilih *M* untuk diintegralkan, maka :

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \int M(x,y)dx \; + g(y) \\ &= \int (x-2y)dx \; + g(y) \\ &= \frac{1}{2}x^2 \; - \; 2xy \; + \; g(y) \end{aligned}$$

Langkah 4. Menyamakan turunan Q(x,y) terhadap y dengan N(x,y):

$$\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{1}{2}x^2 \; - \; 2xy \; + \; g(y)\right) = \; y^2 - 2x$$

$$0 - 2x \; + \; g'(y) \; = y^2 - 2x$$

$$g'(y) \; = y^2$$

Langkah 5. Integralkan $g'(\,y)$, diperoleh :

$$g(y) = \frac{1}{3}y^3$$

Langkah 6. Penyelesaian umum dalam bentuk implisit Q(x,y)=c:

$$\frac{1}{2}x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 = c$$

Langkah 7. Dengan kondisi awal $\boldsymbol{y(0)} = 3$, diperoleh $C = 9$, sehingga penyelesaian khususnya adalah :

$$\frac{1}{2}x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 = 9$$

Latihan soal:

Uji ke-eksakan persamaan diferensial berikut dan selesaikan:

1. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x + 2y}{y^2 + 2x}$
2. $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 4xy}{2x^2 + 2y}, y(0) = 3$
3. $(9x^2 + y - 1)dx - (4y - x)dy = 0$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos y}{x \sin y - y^2}$
5. $(xe^y - e^{2y})dy - (e^y + x)dx = 0$
6. $(e^x siny - 2ysinx)dx + (e^x cosy + 2cosx)dy = 0$
7. $(x^2 - 2xy)dy - (y^2 - 2xy + 1)dx = 0$
8. Tentukan N(x,y)sehingga $(xy - y^2 + x)dx + N(x,y)dy = 0$ eksak!
9. Tentukan M(x,y) shg $M(x,y)dx + (x \sin y + \ln y - ye^x)\, dy = 0$ eksak!

2.7 Persamaan Diferensial Tak-Eksak

Jika suatu PD orde satu berbentuk

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

mempunyai sifat:

$$\frac{\delta M}{\delta y} \neq \frac{\delta N}{\delta x}$$

maka PD tersebut disebut PD Tak-Eksak. Suatu PD tak eksak dapat diubah ke PD eksak dengan mengalikan persamaan dengan suatu faktor yang tepat, yang disebut **faktor pengintegralan** (*integrating factor*). Pada bagian sebelumnya, kita mengenal ***faktor integral:*** $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier order satu dalam bentuk:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)}$$

Faktor integral $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ akan membawa persamaan diferensial linier order satu berbentuk $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ menjadi PD eksak. Secara umum suatu faktor integral adalah faktor μ**(**x**,** y**)** dapat mengubah persamaan diferensial tidak eksak menjadi persamaan diferensial eksak.

Contoh: Tunjukkan bahwa $x\ dy$ + **(**2y **−** xex **)**dx = 0 tidak eksak, tetapi dengan mengalikan dengan faktor μ = x PD tersebut menjadi eksak. Kemudian selesaikan!

Penyelesaian :
Uji ke-eksak-an,

$$\frac{\delta}{\delta y}(2y - xe^x) = 2\ dan\ \frac{\delta}{\delta x}(x) = 1$$

Jadi PD adalah tidak eksak. Dengan mengalikan faktor integral x diperoleh:

$$x^2dy + (2xy - x^2e^x)dx = 0 \rightarrow\ PD\ eksak$$

$$\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta(2xy - x^2e^x)}{\delta y} = 2x\ ;\ \frac{\delta N}{\delta x}\ = \frac{\delta(x^2)}{\delta x} = 2x$$

dari langkah-langkah penyelesaian PD eksak, maka:

$$Q(x,y) = x^2y - x^2e^x + 2xe^x - 2e^x + g(y)$$

jika diketahui:

$$\frac{\delta}{\delta y}Q(x,y) = N(x,y)$$

maka

$$x^2 + g'(y) = x^2 \rightarrow g'(y) = 0 \rightarrow g(y) = 0$$

jadi solusi PD adalah:

$$Q(x,y) = c\ \rightarrow x^2y - x^2e^x + 2xe^x - 2e^x = c$$

2.8 Menentukan Faktor Itegrasi

Jika $M(x,y)dx\ + N(x,y)dy\ = 0$ PD tak eksak dan $\mu(x,y)$ faktor integrasi, maka $\mu(x,y)M(x,y)dx\ + \mu(x,y)N(x,y)dy\ = 0$ adalah PD eksak, sehingga

$$\frac{\delta\mu M}{\delta y}=\frac{\delta\mu N}{\delta x}$$

atau

$$\frac{\delta\mu}{\delta y}M+\frac{\delta M}{\delta y}\mu=\frac{\delta\mu}{\delta x}N+\frac{\delta N}{\delta x}\mu$$

$$\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)\mu=\frac{\delta\mu}{\delta x}N-\frac{\delta\mu}{\delta y}M$$

$$\mu=-\frac{\left(\frac{\delta\mu}{\delta y}M-\frac{\delta\mu}{\delta x}N\right)}{\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)}$$

ada beberapa kasus, yaitu:

(1) $(x,y)=\mu(x)$, faktor integrasi hanya fungsi x, maka:

$$\mu \quad =-\frac{\left(\frac{\delta\mu}{\delta y}M-\frac{\delta\mu}{\delta x}N\right)}{\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)}$$

$$=-\frac{\left(0-\frac{\delta\mu}{\delta x}N\right)}{\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}=\frac{N}{\mu}\frac{\delta\mu}{\delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu}\ \delta\mu=\frac{\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)}{N}dx$$

$$\Leftrightarrow ln\mu=\int\frac{\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)}{N}dx$$

$$\Leftrightarrow \mu=e^{\int\frac{\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)}{N}dx}$$

Sehingga jika $\frac{\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)}{N}$ menghasilkan fungsi x saja maka $\mu(x,y)=\mu(x)$.

(2) $\mu(x,y)=\mu(y)$, faktor integrasi hanya fungsi y, dengan analisis spt (1) maka:

$$\mu = e^{\int \frac{\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)}{M} dy}$$

Sehingga jika $\frac{\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)}{M}$ menghasilkan fungsi y, maka $\mu(x,y)=\mu(y)$.

(3) $\mu(x,y)=\mu(xy)$, jika $\frac{\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)}{yN-xM}$ menghasilkan fungsi xy

(4) $\mu(x,y)=\mu(x+y)$, jika $\frac{\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)}{N-M}$ menghasilkan fungsi $x+y$

(5) $\mu(x,y)=\mu(x-y)$, jika $\frac{\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)}{N+M}$ menghasilkan fungsi $x-y$

(6) $\mu(x,y)=\mu(x^2+y^2)$, jika $\frac{\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)}{2xN+2yM}$ menghasilkan fungsi x^2+y^2

Kesimpulan: Faktor integrasi ditentukan dengan menghitung $\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}$ kemudian membaginya sehingga diperoleh fungsi yang mandiri.

Contoh:

Uji ke-eksakan Persamaan Diferensial

$$x\,dy+(2y-xe^x)\,dx=0$$

Tentukan faktor integral-nya dan berikan solusi PD-nya!

Penyelesaian:

$M(x,y)=(2y-xe^x)$ dan $N(x,y)=x$

$$\frac{\delta M}{\delta y}=\frac{\delta(2y-xe^x)}{\delta y}=2\ ;\ \frac{\delta N}{\delta x}=1\ \ jadi\ \frac{\delta M}{\delta y}\neq\frac{\delta N}{\delta x}\ (PD\ takeksak)$$

Faktor integrasi:

$$\frac{\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}}{x}=\frac{2-1}{x}=\frac{1}{x} \quad \rightarrow \; \mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$$

dari sini seperti contoh sebelumnya dapat ditunjukkan dengan mengalikan x pada persamaan dihasilkan PD eksak. Dan solusi PD seperti dibahas pada contoh sebelumnya didapatkan:

$$x^2y - x^2e^x + 2xe^x - 2e^x = c$$

Latihan soal:

Tunjukkan bahwa PD berikut takeksak, kemudian tentukan faktor integrasi serta uji ke-eksakannya, selanjutnya dapatkan solusi umum PD!

1. $2xydy + (3x + 2y^2)dx = 0$
2. $(3 - 2y)dx + (x^2 - 1 \quad)dy = 0$
3. $(x^2 + 3x + 2)dx + (x^2 + x + 1)dy \quad dy = 0$
4. $(y - 2x^3)dx - x(1 - xy \quad)dy = 0$