BAB I
KONSEP DASAR PERSAMAAN DIFERENSIAL

Tujuan Instruksional:

- *Mampu memahami definisi Persamaan Diferensial*
- *Mampu memahami klasifikasi Persamaan Diferensial*
- *Mampu memahami bentuk bentuk solusi Persamaan Diferensial*
- *Mampu memahami pembentukan Persamaan Diferensial*

1.1 Definisi

Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan variabel-variabel tak bebas dan derivatif-derivatifnya terhadap variabel-variabel bebas. Berikut ini adalah contoh persamaan diferensial:

(1) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 6x\frac{dy}{dx} = 0$	var. bebas = x;	var. takbebas = y
(2) $y' = e^x + \sin x$	var. bebas = x;	var. takbebas = y
(3) $\frac{d^2Q}{dt^2} - 3\frac{dQ}{dt} + 10Q = 4$	var. bebas = t;	var. takbebas = Q
(4) $\frac{\partial^2V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2V}{\partial y^2} = 0$	var. bebas = x,y;	var. takbebas = V

Persamaan diferensial sangat penting di dalam matematika untuk rekayasa sebab banyak hukum dan hubungan fisik muncul secara matematis dalam bentuk persamaan diferensial. Persamaan diferensial (disingkat PD) diklasifikasikan dalam dua kelas yaitu biasa dan parsial.

Persamaan Diferensial Biasa (*ordinary differential equation*) disingkat PDB adalah suatu persamaan diferensial yang hanya mempunyai satu variabel bebas. Jika $y(x)$ adalah suatu fungsi satu variabel, maka x dinamakan variabel bebas dan *y* dinamakan variabel tak bebas. Persamaan (1), (2), (3) adalah contoh PDB.

Persamaan Diferensial Parsial (disingkat PDP) adalah suatu persamaan diferensial yang mempunyai dua atau lebih variabel bebas. Persamaan (4) adalah contoh PDP (yang dibahas pada buku Matematika Teknik I jilid lanjutan)

Orde persamaan diferensial ditentukan oleh turunan tertinggi dalam persamaan tersebut, contoh:

$x\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$ adalah PDB orde satu

$xy\frac{d^2y}{dx^2} - y^2 \sin x = 0$ adalah PDB orde dua

$\frac{d^3y}{dx^3} - y\frac{dy}{dx} + e^{4x} = 0$ adalah PDB orde tiga

Persamaan di atas dapat ditulis dg notasi lain yaitu:

$xy' - y^2 = 0$ adalah PDB orde satu

$xyy' - y^2 \sin x = 0$ adalah PDB orde dua

$y''' - yy' + e^{4x} = 0$ adalah PDB orde tiga

Derajat (degree) dari suatu persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi dari turunan tertinggi suatu persamaan diferensial, contoh:

$1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = 3\frac{d^2y}{dx^2}$ adalah PDB orde dua derajat satu

$x(y'')^3 + (y')^4 - y = 0$ adalah PDB orde dua derajat tiga

Syarat tambahan pada persamaan diferensial, untuk satu nilai variabel bebas yang mempunyai satu atau lebih nilai syarat disebut **syarat awal (*initial conditions*)**. PD dengan syarat awal dikatakan sebagai suatu masalah nilai awal (*initial-value problem*). Jika syarat yang diberikan pada PD lebih dari satu nilai variabel bebas, disebut **syarat batas** dan merupakan PD dengan masalah nilai batas (*boundary-value problem*).

Contoh:

- $4y'' + 23y' = e^x; y(2) = 1;\ y(2) = 5$

adalah PD dengan masalah nilai awal karena dua syarat pada x yang sama yaitu x=2

- $4y'' + 23y' = e^x; y(1) = 1;\ y(2) = 5$

adalah PD dengan masalah nilai batas karena dua syarat pada x yang berbeda yaitu x=1 dan x=2

1.2 Linieritas dan Homogenitas.

Persamaan diferensial biasa orde-n dikatakan linier bila dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x)$$

dengan $a_0(x) \neq 0$

Jika tidak maka persamaan diferensial dikatakan tidak linier.

1. Jika koefisien $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ konstan maka disebut persamaan diferensial linier dengan koefisien konstan, jika tidak disebut persamaan differensial linier dengan koefisien variable.
2. Jika $F(x) = 0$, maka disebut persamaan differensial linier homogen, jika $F(x) \neq 0$ disebut tidak homogen.

Contoh:

Persamaan Diferensial	Klasifikasi Persamaan Diferensial
$2y''' + 5y' + 2xy = cos(x)$	PD Linier, PD biasa ,PD-orde2
$2yy''' + 5y' + 2xy = cos(x)$	PD non Linier
$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = cos(z)$	PD non Linier disebabkan adanya suku *cos(z)*

1.3 Solusi (Penyelesaian) PDB

Beberapa jenis solusi PD akan dijabarkan sebagai berikut:

1. Solusi PD bentuk eksplisit yaitu solusi PD dengan fungsi yang mana variabel bebas dan variabel tak bebas dapat dibedakan dengan jelas. Solusi eksplisit dinyatakan dalam bentuk y = f(x). Contoh solusi/fungsi eksplisit: $y = x^2 + 5x + 4$
2. Solusi PD bentuki implisit yaitu solusi PD dengan fungsi yang mana variabel bebas dengan variabel tak bebas tidak dapat dibedakan secara jelas. Fungsi implisit ditulis dalam bentuk f(x,y) = 0. Contoh solusi/fungsi implisit: $x^2 + y^2 = 25$ atau $x^2 + y^2 - 25 = 0$

Penyelesaian implisit dan penyelesaian eksplisit, keduanya secara singkat biasa disebut penyelesaian PDB.

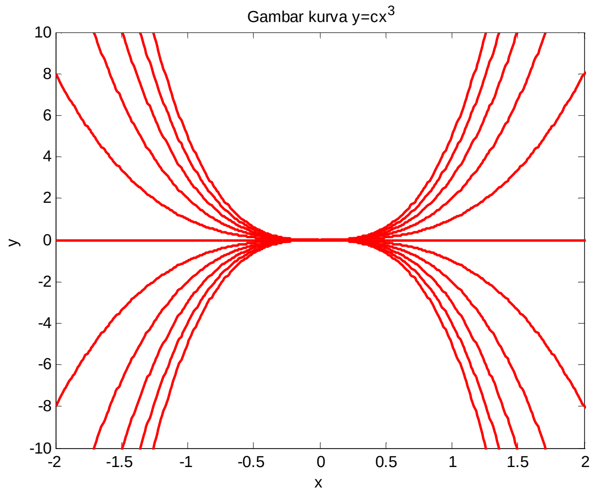
Solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) terbagi dalam tiga jenis solusi yaitu:

1. Solusi Umum (Penyelesaian Umum): solusi PDB yang masih mengandung konstanta sebarang misalnya *c*.

   Contoh PD $\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}$ mempunyai penyelesaian umum $y = cx^3$.

2. Solusi Khusus/Partikulir (Penyelesaian Khusus/Partikulir): solusi yang tidak mengandung konstanta variabel karena terdapat syarat awal pada suatu PDB.

   Contoh PD $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ dengan syarat $x(0) = 4$, mempunyai penyelesaian khusus $y = x^3 + 4$

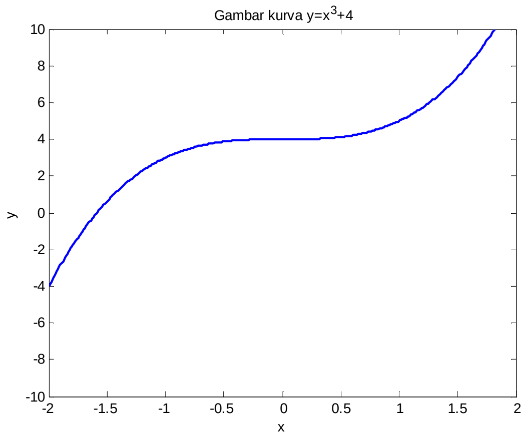


Gambar 1 Keluarga Kurva $y = cx^3$

Gambar 1 dibuat dengan program MATLAB sebagai berikut:

```
%Program MATLAB kurva y=cx^3 %
clc;
clear all;
for c=-5:1:5
x = -5:0.01:5;
y = c*x.^3;
plot(x,y,'r','linewidth',2)
axis([-2, 2,-10,10])
xlabel('x')
ylabel('y')
title(' Gambar kurva y=cx^3')
hold on
end
```

3. Solusi Singular (Penyelesaian Singular): solusi yang tidak diperoleh dari hasil mensubstitusikan suatu nilai konstanta pada solusi umumnya. Contoh: $y = cx + c^2$ diketahui sebagai solusi umum dari PDB: $(y')^2 + xy' = y$, tetapi disisi lain PDB tersebut mempunyai penyelesaian lain: $y = -\frac{1}{4}x^2$, penyelesaian ini disebut sebagai penyelesaian singular.



Gambar 2 Kurva $y = x^3 + 4$

Program MATLAB untuk Gambar 2 sebagai berikut:

```
%Program MATLAB kurva y=x^3+4%
clc;
clear all;
x = -5:0.01:5;
y=x.^3+4
plot(x,y,'b','linewidth',2)
axis([-2, 2,-10,10])
xlabel('x')
ylabel('y')
title(' Gambar kurva y=x^3+4')
```

1.4 Metode Penyelesaian.

Metode yang digunakan untuk mencari solusi (menyelesaikan) Persamaan Diferensial antara lain:

1. Metode Analitik: Metoda ini menghasilkan dua bentuk solusi yaitu bentuk eksplisit dan implisit. Untuk masalah-masalah yang komplek metode analitik ini jarang digunakan karena memerlukan analisis yang cukup rumit.
2. Metode Kualitatif: Solusi PDB didapatkan dengan perkiraan pada pengamatan pola medan gradien. Metode ini memberikan gambaran secara geometris dari solusi PDB. Metode ini meskipun dapat memberikan pemahaman kelakuan solusi suatu PDB namun fungsi asli dari solusinya tidak diketahui dan metode ini tidak digunakan untuk kasus yang komplek.
3. Metode Numerik. Solusi yang diperoleh dari metode ini adalah solusi hampiran (solusi pendekatan/aproksimasi). Dengan bantuan program komputer, metode ini dapat menyelesaikan PDB dari tingkat sederhana sampai pada masalah yang komplek.

Ketiga metode tersebut dapat diselesaikan dengan software MATLAB.

1.5 Pembentukan Persamaan Diferensial

Secara matematis, persamaan diferensial muncul jika ada konstanta sembarang dieliminasikan dari suatu fungsi tertentu yang diberikan.

Contoh: Bentuklah persamaan diferensial dari fungsi berikut

$$y = x + \frac{A}{x}$$

Penyelesaian:

$$y = x + \frac{A}{x} = x + Ax^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - Ax^{-2} = 1 - \frac{A}{x^2}$$

dari fungsi yang diberikan (soal) konstanta sembarang A adalah:

$$\frac{A}{x} = y - x \quad \leftrightarrow A = x(y - x)$$

sehingga

$$\frac{dy}{dx} = 1 - Ax^{-2} = 1 - \frac{x(y - x)}{x^2}$$

$$= 1 - \frac{(y - x)}{x} = \frac{x - y + x}{x} = \frac{2x - y}{x}$$

sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x} \leftrightarrow x\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x}$$

Satu contoh lagi, bentuklah persamaan diferensial untuk

$$y = Ax^2 + Bx$$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2A \qquad \leftrightarrow A = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$$

substitusikan konstanta A ke:

$$\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$$

sehingga

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}x + B = x\frac{d^2y}{dx^2} + B$$

$$B = \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}$$

dengan mensubstitusikan A dan B pada persamaan:

$$y = Ax^2 + Bx$$

kita dapatkan:

$$y = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}x^2 + \left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$= x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

Hasil akhir penyelesaian di atas adalah persamaan diferensial orde dua.

Jadi fungsi dengan satu konstanta sembarang menghasilkan persamaan diferensial orde satu, sedangkan fungsi dengan dua konstanta sembarang menghasilkan persamaan diferensial orde dua. Sehingga berlaku kaidah:

Fungsi yang mempunyai n buah konstanta sembarang akan menghasilkan Persamaan Diferensial orde ke-n

Latihan Soal:

Klasifikasikan Persamaan Diferensial berikut sebagai:

- PDB atau PDP
- PD Linier atau non-Linier
- nyatakan variabel bebas dan takbebasnya

1. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 10\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

3. $2x(y+1)dx - (x^2+1)dy = 0$

4. $2ydy + 2xdx = 2dx$

5. $\dfrac{dr}{d\theta} + rtan(\theta) = cos^2(\theta)$

6. $\dfrac{dx}{dt} + x = \sin(2t)$

7. $y'' - 2y' + y = -\sin(t) - 3e^t$

8. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{t} = \dfrac{t}{y^3}$

9. $5\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 9x = 2cos\,(3t)$

10. $\left[\dfrac{dp}{dt}\right]^2 = \text{ap}\,(b-p)$

11. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} + xt = 0$

12. $y'' + (y')^2 + 2y^2 = 0$

13. $y^{(4)} - y = \text{t} - 1$

14. $\dfrac{\partial y}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial t} + y^2 = 0$

15. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x(1+3y)}{y(2-3x)}$

Untuk Persamaan Diferensial berikut buktikan bahwa satu atau beberapa fungsi yang diberikan adalah solusi PD:

16. $xy'' - (x+1)y' + y = 0\,;\; y_1(x) = e^x\,, y_2(x) = x+1$

17. $2y''' + 9y'' + 12y' + 5y = 0\,;\; y(x) = (x+1)e^{-x}9y''$

18. $4x^2y'' + 8xy' + y = 0\,;\; y(x) = x^{-\frac{1}{2}}\ln(x)$

19. $y'' = 6y' - 13y\,;\; y(x) = e^{3x}\cos(2x)$

20. $y'' + 4y = (x^2-3)\sin(2x)\,;\; y(x) = \left(-\dfrac{1}{12}x^3 + \dfrac{25}{32}x\right)\cos(2x) + \dfrac{1}{16}x^2\sin(2x)$