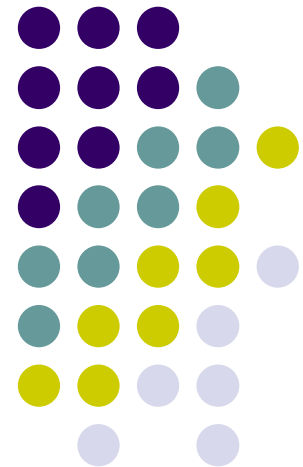


# METODE NUMERIK

---

## SISTEM PERSAMAAN ALJABAR LINIER (SPL) SIMULTAN



<http://maulana.lecture.ub.ac.id/lecture/metode-numerik/>



# Sistem Persamaan Linier

- Misal terdapat SPL dengan n buah variabel bebas

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = C_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = C_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = C_n$$

Matriks:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

# Penyelesaian Sistem Persamaan Linier (SPL)



- Algoritma Gauss Naif
- Algoritma Gauss Jordan
- Algoritma Gauss Seidel



# Algoritma Gauss Naif

1. Membagi persamaan pertama dengan koefisien  $a_{11}$ . Langkah tersebut disebut normalisasi. Tujuan normalisasi ini adalah agar koefisien dari  $x_1$  berubah menjadi 1.
2. Kalikan persamaan yang telah dinormalisasi (dalam hal ini persamaan pertama) dengan koefisien pertama dari persamaan kedua (yaitu  $a_{21}$ ).
3. Mengurangkan baris kedua dan ketiga dengan baris pertama.



# Algoritma Gauss Naif

4. Kalikan persamaan pertama yang sudah dinormalisasi dengan koefisien tertentu sehingga  $a_{11} = a_{31}$ .
5. Kurangkan persamaan ketiga dengan hasil dari yang didapat dari langkah 4.
6. Baris kedua dibagi dengan koefisien  $a_{22}$ . Langkah ini disebut NORMALISASI untuk persamaan kedua. Tujuannya adalah agar koefisien  $x_2$  berubah menjadi 1.

# Algoritma Gauss Naif



7. Kalikan persamaan kedua yang sudah dinormalisasi pada langkah ke-6 dengan suatu koefisien tertentu sehingga  $a_{22} = a_{32}$ .
8. Kurangkan persamaan ketiga dengan persamaan kedua hasil dari langkah ke-7.



# Algoritma Gauss Naif (Ex.)

- Diketahui SPL:

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 2$$

- Bagaimana penyelesaiannya?



# Algoritma Gauss Naif (Ex.)

- Matriks yang terbentuk:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Langkah:

1.  $\frac{1}{2}b_1 \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



# Algoritma Gauss Naif (Ex.)



2. dan 3.

$$b_2 - 3b_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & -4 & -1/2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. dan 5.

$$b_3 - b_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & -4 & -1/2 \\ 0 & 3 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$



# Algoritma Gauss Naif (Ex.)

6.

$$-\frac{1}{4}b_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 3 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

7. dan 8.

$$b_3 - 3b_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{15}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{15}{4} \end{bmatrix}$$

# Algoritma Gauss Naif (Ex.)



- Hasil:

$$-\frac{15}{8} \cdot x_3 = -\frac{15}{4}$$

$$x_3 = 2$$

$$x_2 + \frac{1}{8} x_3 = \frac{5}{4}$$

$$x_2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{8}(2) = 1$$

$$x_1 + x_2 + \frac{1}{2} x_3 = 2$$

$$x_1 = 2 - (1) - \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) = 0$$



# Algoritma Gauss Jordan

- Dengan metode Gauss Jordan matriks A diubah sedemikian rupa sampai terbentuk identitas dengan cara :

$[A \mid I]X = C$  diubah menjadi  $[I \mid A^{-1}]X = C^*$   
 $C^*$  merupakan matriks C yang sudah mengalami beberapa kali transformasi, sehingga:

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x_n \end{array} \right] A^{-1} = \left[ \begin{array}{c} C_1^* \\ C_2^* \\ C_3^* \\ \vdots \\ C_n^* \end{array} \right]$$
$$\begin{aligned} x_1 &= C_1^* \\ x_2 &= C_2^* \\ x_n &= C_n^* \end{aligned}$$

# Algoritma Gauss Jordan (Ex.)



- Diketahui SPL:

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 2$$

- Bagaimana penyelesaiannya?

# Algoritma Gauss Jordan (Ex.)



- Langkah:

$$1. \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$2. \frac{1}{2} b_1 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

# Algoritma Gauss Jordan (Ex.)



$$3. \begin{array}{l} b_2 - 3b_1 \\ b_3 - b_1 \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4. -\frac{1}{4}b_2 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/8 & 3/8 & -1/4 & 0 \\ 0 & 3 & -3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Algoritma Gauss Jordan (Ex.)



$$5. \quad \begin{matrix} b_1 - b_2 \\ b_3 - 3b_2 \end{matrix} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{8} & -\frac{13}{8} & \frac{3}{4} & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{15}{4} \end{bmatrix}$$

$$6. \quad -\frac{8}{15} b_3 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{15} & -\frac{6}{15} & -\frac{8}{15} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \\ 2 \end{bmatrix}$$



# Algoritma Gauss Jordan (Ex.)



$$7. \quad \begin{array}{l} b_1 - \frac{3}{8}b_3 \\ b_2 - \frac{1}{8}b_3 \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{21}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{15} & -\frac{6}{15} & -\frac{8}{15} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jadi:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$



# Algoritma Gauss Seidel

- Sering dipakai untuk menyelesaikan persamaan yang berjumlah besar.
- Dilakukan dengan suatu iterasi yang memberikan harga awal untuk  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ .
- Metode ini berlainan dengan metode Gauss Jordan dan Gauss Naif karena metode ini menggunakan iterasi dalam menentukan harga  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ .
- Kelemahan metode eliminasi dibandingkan metode iterasi adalah metode eliminasi sulit untuk digunakan dalam menyelesaikan SPL berukuran besar.

# Algoritma Gauss Seidel



1. Beri harga awal  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$
2. Hitung  $x_1 = \frac{C_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \dots + a_{1n}x_n)}{a_{11}}$

Karena  $x_2 = x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0$ , maka

$$x_1 = \frac{C_1}{a_{11}}$$

# Algoritma Gauss Seidel



3.  $x_1$  baru yang didapat dari tahap 2 digunakan untuk menghitung  $x_2$ .

$$\text{Baris 2} \rightarrow a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = C_2$$

$$x_2 = \frac{C_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n}{a_{22}}$$

$$x_2 = \frac{C_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}$$

# Algoritma Gauss Seidel



4. Menghitung  $x_3$

$$\text{Baris 3} \rightarrow a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = C_3$$

$$a_{33}x_3 = C_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \dots - a_{3n}x_n$$

$$x_3 = \frac{C_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{34}x_4 - \dots - a_{3n}x_n}{a_{33}}$$

$$x_3 = \frac{C_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$



# Algoritma Gauss Seidel

5. Cara ini diteruskan sampai ditemukan  $x_n$ .
6. Lakukan iterasi ke-2 untuk menghitung  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , ...,  $x_n$  baru

$$x_1 = \frac{C_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{C_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n}{a_{22}}$$

⋮

$$x_n = \frac{C_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - a_{n3}x_3 - \dots - a_{n(n-1)}x_{n-1}}{a_{nn}}$$



# Algoritma Gauss Seidel

7. Mencari kesalahan iterasi  $|\varepsilon_a|$  dengan cara:

$$X_i \Rightarrow |\varepsilon_a| = \left| \frac{X_{i(\text{baru})} - X_{i(\text{lama})}}{X_{i(\text{baru})}} \right| * 100\%$$

⋮

$$X_n \Rightarrow |\varepsilon_a| = \left| \frac{X_{n(\text{baru})} - X_{n(\text{lama})}}{X_{n(\text{baru})}} \right| * 100\%$$

8. Iterasi diteruskan sampai didapat  $|\varepsilon_a| < |\varepsilon_s|$

# Algoritma Gauss Seidel (Ex.)



- Diketahui SPL:

$$x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -51$$

$$4x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 61$$

$$12x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$

dan  $\varepsilon_a = 5 \%$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 4 & -4 & 9 \\ 12 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -51 \\ 61 \\ 8 \end{bmatrix}$$



# Algoritma Gauss Seidel (Ex.)



- Iterasi ke-0

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

- Iterasi ke-1

$$x_1 = \frac{-51}{1} = -51 \quad x_2 = \frac{61 - 4x_1}{-4} = \frac{61 - 4(-51)}{-4} = -66,25$$

$$x_3 = \frac{8 - 12x_1 + x_2}{3} = \frac{8 - (-51) + (-66,25)}{3} = 184,58$$

# Algoritma Gauss Seidel (Ex.)



- Iterasi ke-2

$$x_1 = \frac{-51 - 7x_2 + 3x_3}{1} = \frac{-51 - 7(-66,25) + 3(184,58)}{1} = 966,49$$

$$x_2 = \frac{61 - 4x_1 - 9x_3}{-4} = \frac{61 - 4(966,49) - 9(184,58)}{-4} = 1366,55$$

$$x_3 = \frac{8 - 12x_1 + x_2}{3} = \frac{8 - 12(966,49) + (1366,55)}{3} = -3407,78$$

# Algoritma Gauss Seidel (Ex.)



- Iterasi ke-3

$$x_1 = \frac{-51 - 7x_2 + 3x_3}{1} = \frac{-51 - 7(1366,55) + 3(-3407,78)}{1} = -19840,19$$

$$x_2 = \frac{61 - 4x_1 - 9x_3}{-4} = \frac{61 - 4(-19840,19) - 9(-3407,78)}{-4} = -27522,94$$

$$x_3 = \frac{8 - 12x_1 + x_2}{3} = \frac{8 - 12(-19840,19) + (-27522,94)}{3} = 70189,11$$

- Perhitungan  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  diteruskan sampai semua  $|\varepsilon_a| < |\varepsilon_s|$

# Algoritma Gauss Seidel (Ex.)



Iterasi ke-	Nilai x	$\epsilon_a$
0	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$	
1	$x_1 = -51$ $x_2 = -66,25$ $x_3 = 184,58$	
2	$x_1 = 966,49$ $x_2 = 1366,55$ $x_3 = -3407,78$	$\epsilon_a = 105,28 \%$ $\epsilon_a = 104,85 \%$ $\epsilon_a = 105,42 \%$
3	$x_1 = -19840,19$ $x_2 = -27522,94$ $x_3 = 70189,11$	$\epsilon_a = 104,87 \%$ $\epsilon_a = 104,97 \%$ $\epsilon_a = 104,86 \%$



# Koefisien Relaksasi ( $\lambda$ )

- Tujuan:  
Perbaikan konvergensi dalam Gauss Seidel.
- Biasanya koefisien relaksasi dipilih sendiri berdasarkan masalah yang dihadapi.
- Jika SPL tidak konvergen,  $\lambda$  yang bernilai antara 0 s/d 1 disebut Under Relaksasi.
- $\lambda$  antara 1 dan 2 biasanya digunakan untuk mempercepat konvergensi suatu sistem persamaan yang konvergen, disebut Over Relaksasi.



# Koefisien Relaksasi ( $\lambda$ )

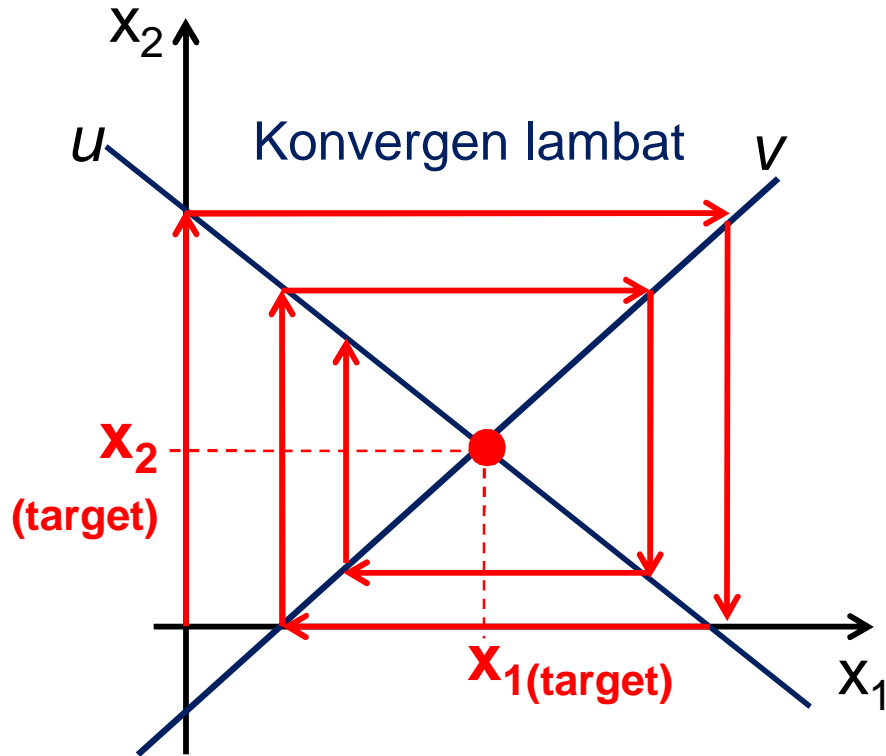
- Rumus (nilai SPL) dengan menggunakan  $\lambda$

$$x_i = \lambda \cdot x_i^{baru} + (1 - \lambda) \cdot x_i^{lama}$$

$$0 < \lambda < 2$$

$$\lambda \neq 1$$

# Solusi perbaikan dengan Koefisien Relaksasi ( $\lambda$ ) pada metode Gauss Seidel

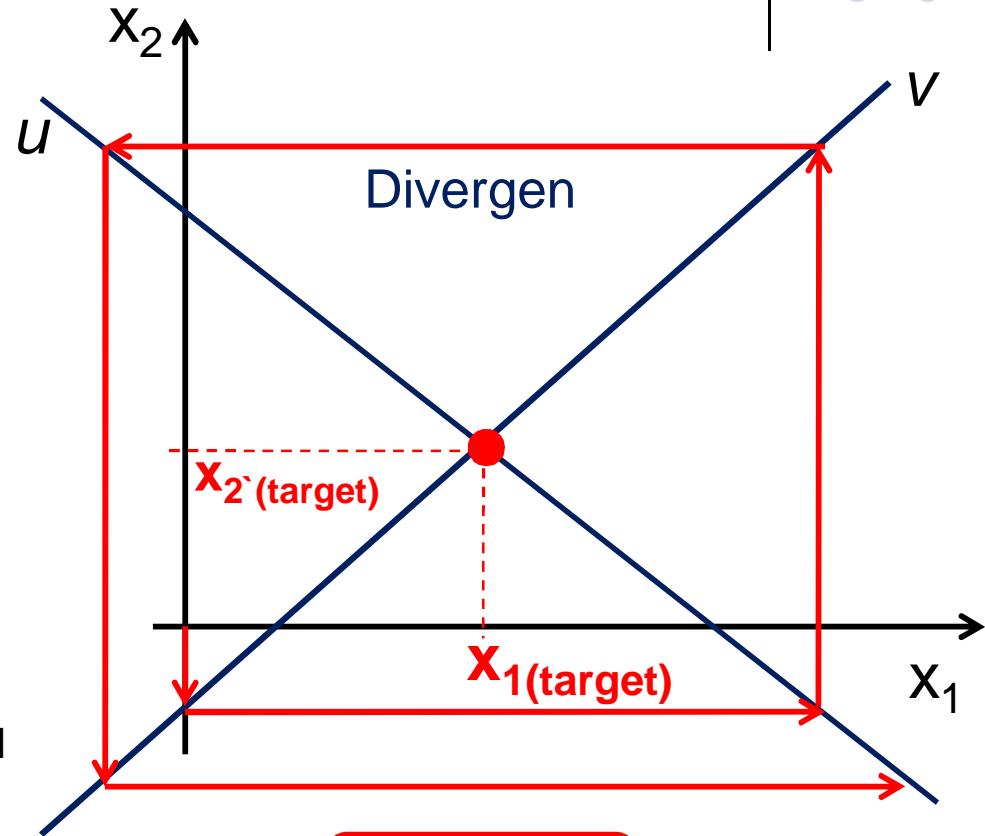


Solusi:

$$1 < \lambda < 2$$

*Over relaxation*

Mempercepat konvergensi



$$0 < \lambda < 1$$

*Under relaxation*

Divergen menjadi konvergen



# Koefisien Relaksasi ( $\lambda$ ) (Ex.)

Iterasi ke-	Nilai x	dengan $\lambda$ (1,5)
0	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$	
1	$x_1 = 10$ $x_2 = 15$	
2	$x_1 = 6$ $x_2 = 7,5$	$x_1$ baru = 4 $x_2$ baru = 3,75
3	$x_1 = 4$ $x_2 = 3,75$	

Contoh perhitungan :

$$\begin{aligned}x_1 \text{ baru} &= 1,5 \cdot 6 + (1 - 1,5) \cdot 10 \\ &= 9 + (-0,5) \cdot 10 \\ &= 4\end{aligned}$$