METODE NUMERIK

AKAR-AKAR PERSAMAAN

Eka Maulana
Dept. of Electrcal Engineering
University of Brawijaya

- Pendekatan Pencarian Akar-akar Persamaan
- Metode Pencarian Akar Persamaan

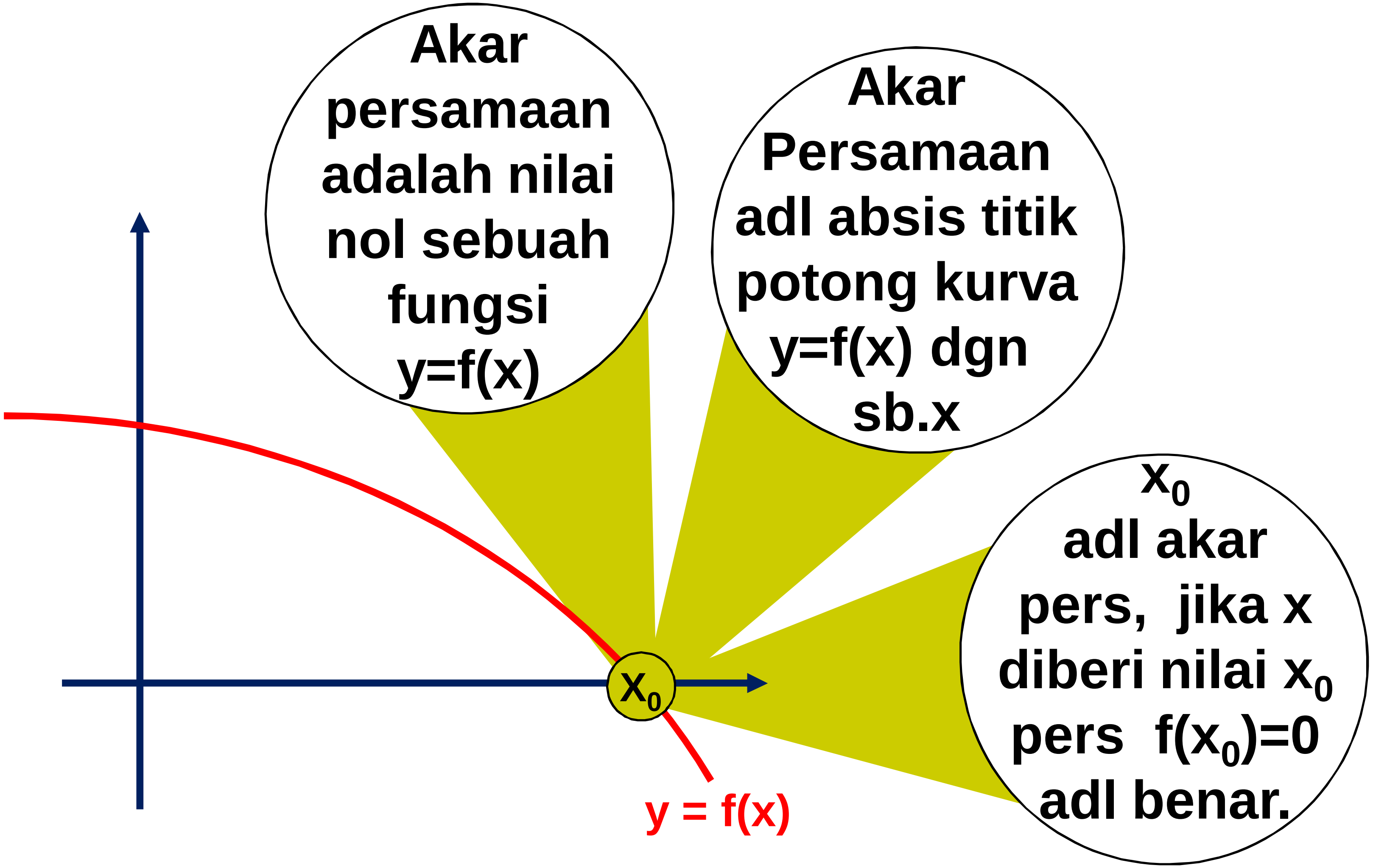
  > Metode Pengurung

  - metode Tabulasi & Grafis
  - metode Bagi dua (*Bisection*)
  - metode Posisi Palsu (*Regula Falsi*)

  > Metode Terbuka

  - metode Iterasi Satu Titik
  - metode *Newton-Raphson*
  - motode *Secant*

Studi Kasus


Akar persamaan adalah nilai nol sebuah fungsi y=f(x)
Akar Persamaan adl absis titik potong kurva y=f(x) dgn sb.x
x_0 adl akar pers, jika x diberi nilai x_0 pers $f(x_0)=0$ adl benar.
X_0
y = f(x)

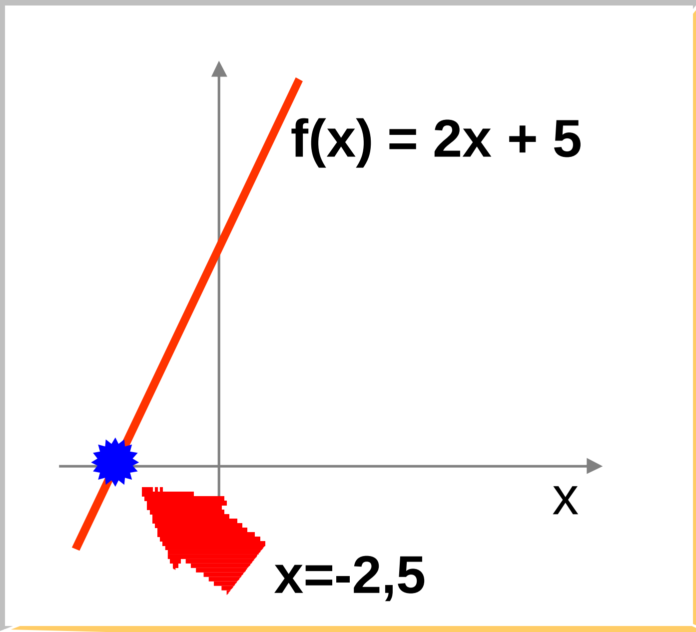
Definisi

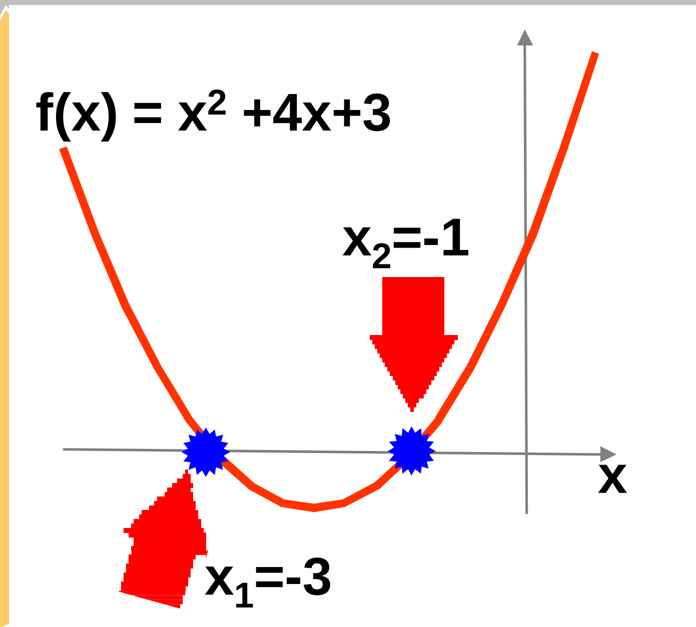
- Akar-akar suatu persamaan dari suatu fungsi x sebenarnya adalah harga x yang membuat f(x) = 0.
- Sebelum kemajuan komputer, menyelesaikan suatu akar persamaan menggunakan metode analitis dan grafik.
  - Analitis $\rightarrow$ $f(x) = x^2 - 4x \rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$
    (bukan numerik)

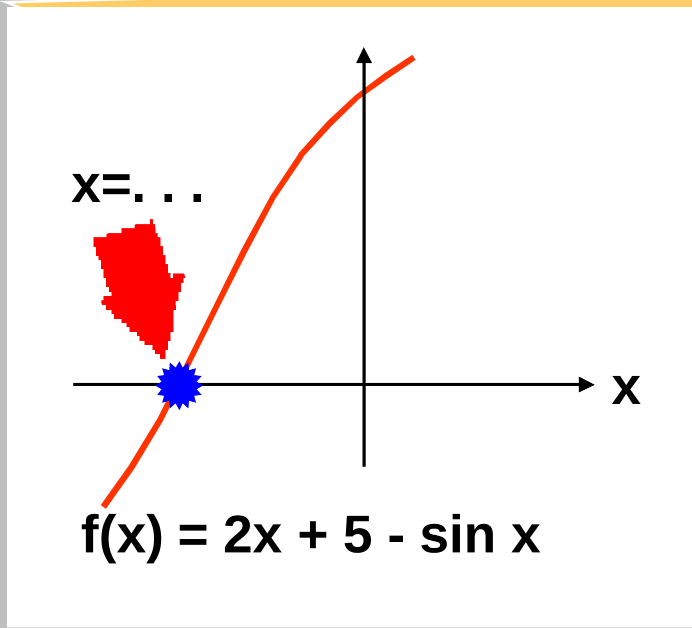
$$(x-5)\,(x+2) = 0$$

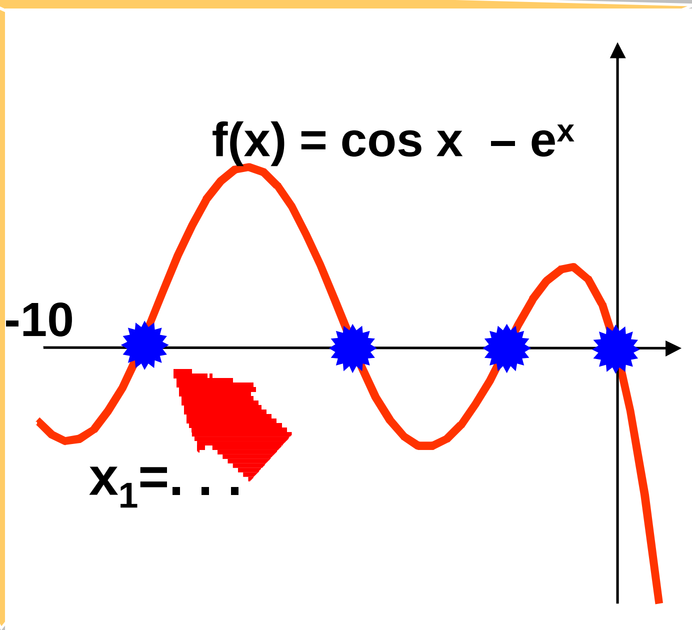
$$x_1 = 5 \text{ atau } x_2 = -2$$

BEBERAPA CONTOH



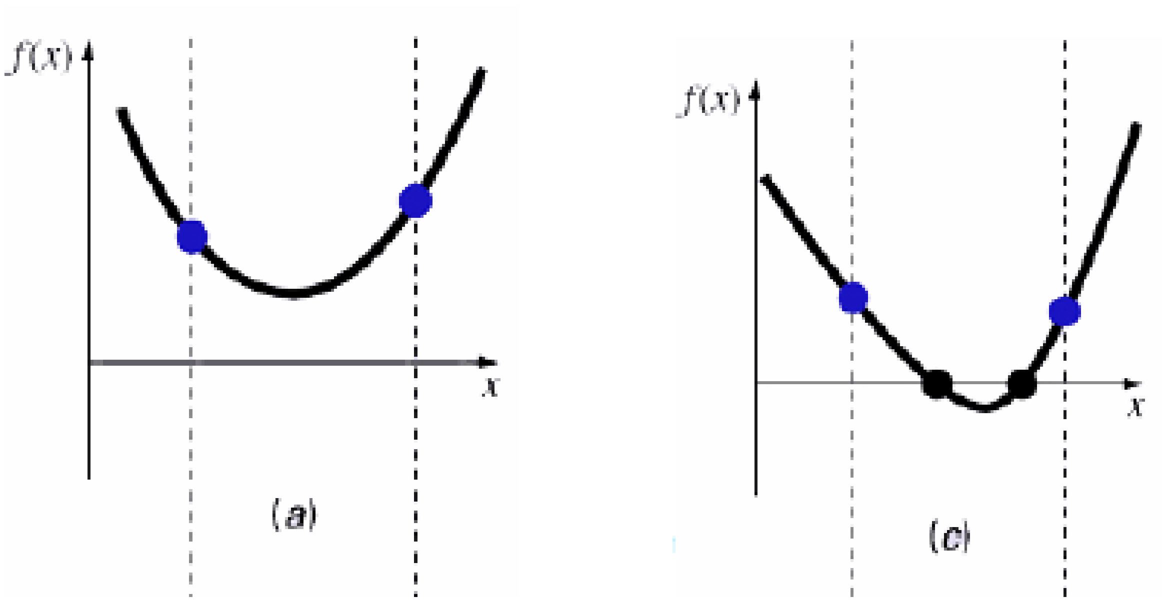






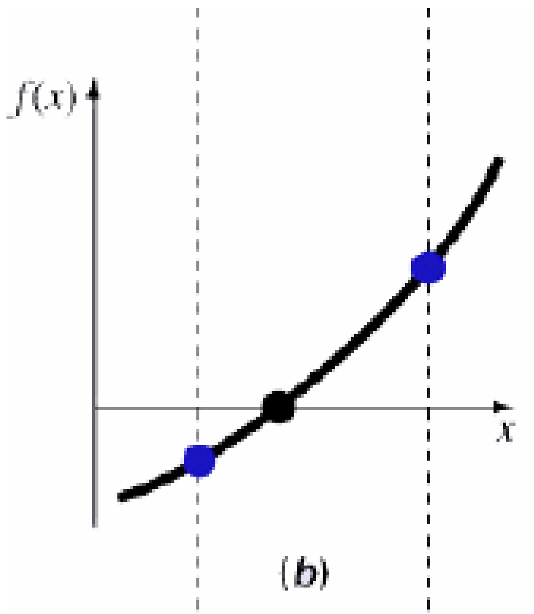
Jumlah Akar Persamaan

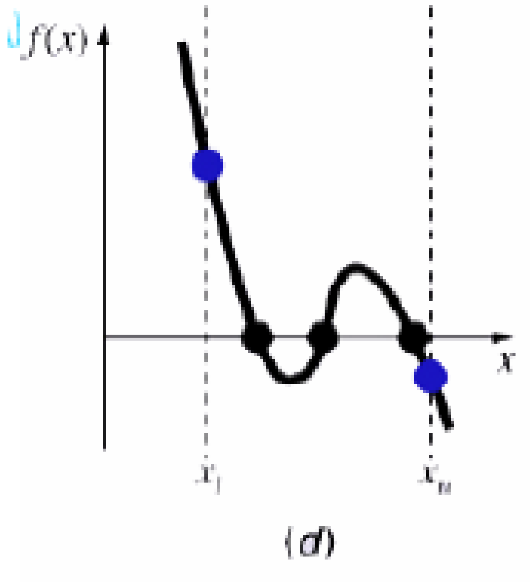
- Bila $f(x_i)$ dan $f(x_u)$ mempunyai tanda yang sama, maka jumlah akar biasanya merupakan bilangan genap.



Jumlah Akar

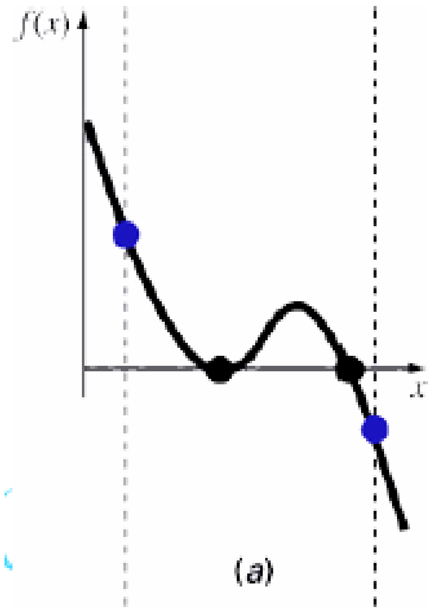
- Bila $f(x_i)$ dan $f(x_u)$ mempunyai tanda yang berbeda, maka jumlah akar biasanya merupakan bilangan ganjil.



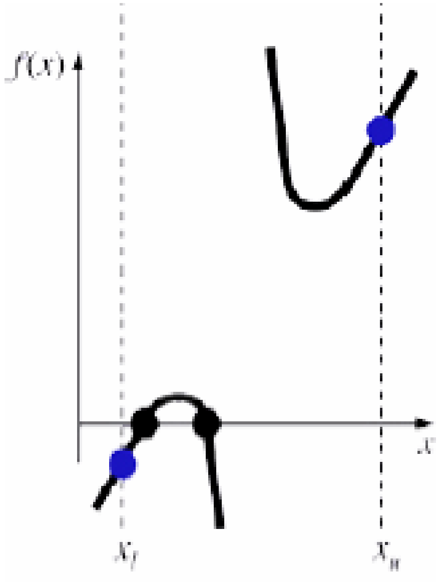


Jumlah Akar

- Meskipun generalisasi ini biasanya benar, tetapi ada kasus tertentu dimana suatu fungsi mempunyai akar kembar atau fungsi tersebut diskontinu.



(a)



(b)

TEOREMA

Jika y=f(x) adalah kontinyu pada sebuah interval dari x=a s/d x=b sedangkan f(a) dan f(b) mempunyai tanda berlawanan, yaitu

$$f(a) * f(b) < 0$$

Maka dalam interval itu sekurang-kurangnya terdapat satu akar.

AKAR AKAR PERSAMAAN DINYATAKAN SEBAGAI TITIK POTONG DUA KURVA

- **$e^{(x-5)} - 5\cos x = 0$ dinyatakan sebagai:**

  $$e^{(x-5)} = 5\cos x$$

- **Masing-masing sisi diambil sbg fungsi:**

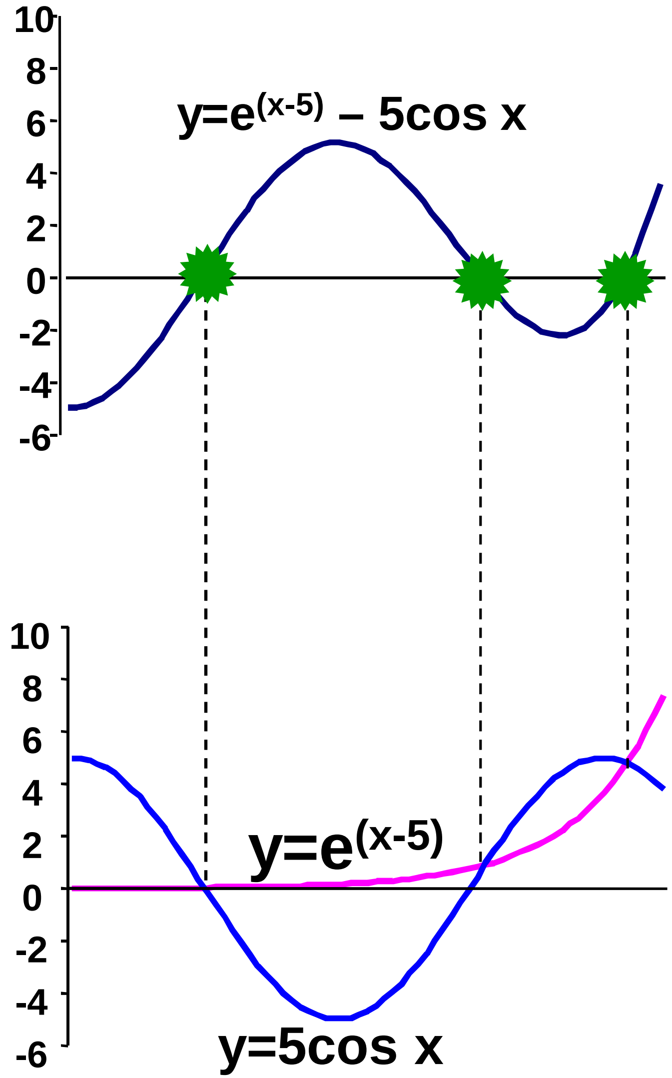
  $$y = e^{(x-5)}$$

  $$y = 5\cos x$$

- **Titik potong kedua kurva merupakan akar persamaan:**

  $$e^{(x-5)} - 5\cos x = 0$$

Sukar memprediksi (menggambar Kurva) akar $y=e^{(x-5)}-5\cos x$?

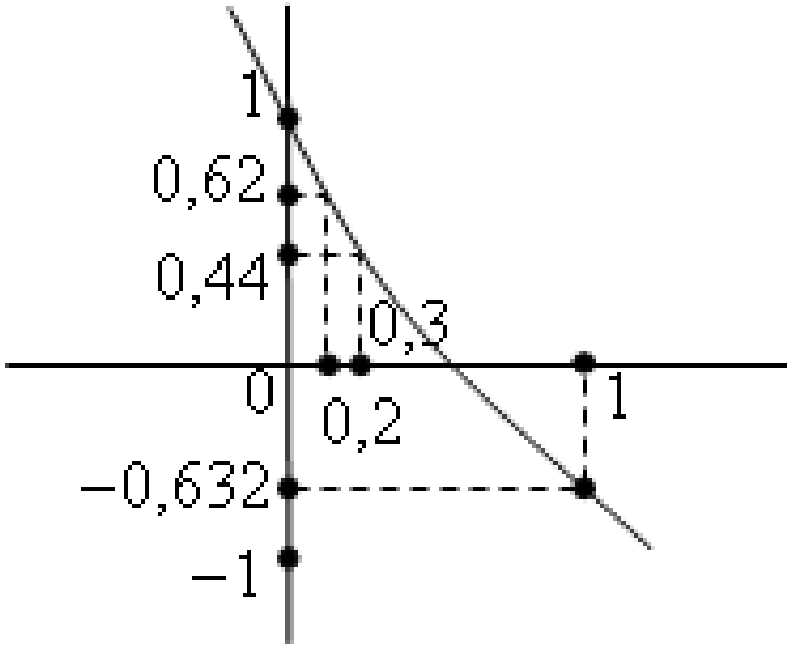


Metode Tertutup (Akolade)

- Metode ini sering disebut metode terkurung/tertutup karena membutuhkan dua tebakan awal untuk menentukan akar suatu f(x).
- Dua tebakan harus mengapit akarnya, berarti harus ditentukan sebelum akar dan setelah akar
  - Dalam metode pengurung, grafik fungsi **digambar secara kasar**.

Kasus Pengantar

- Berapa akar dari suatu $f(x) = e^{-x} - x$? Dengan analitis sulit tetapi masih bisa diselesaikan dengan metode grafik, dengan cara:



x	f(x)
0	1
0,2	0,6187
0,3	0,4408
|	|
1	-0,632

Metode Tabulasi & Grafik

- Metode paling sederhana untuk memperoleh tafsiran akar suatu f(x) dengan membuat tabel dan grafik dari fungsi tersebut dan kemudian mengamati berapa nilai x yang menyebabkan f(x) berharga 0.
- Jika selang dari tiap perubahan nilai x ditentukan semakin kecil, maka akan menghasilkan nilai yang semakin teliti.

Metode Tabulasi

- Menentukan titik awal f(x), misal $f(x_1)$ dan $f(x_2)$

  Syarat: $\mathbf{f(x_1) * f(x_2) < 0}$

  Jika syarat tersebut terpenuhi, penyelesaian berada pada nilai x_1 dan x_2
- Membuat tabel fungsi f(x), diantara $f(x_1)$ dan $f(x_2)$
- Membuat tabel sekitar dua titik x penyebab perbedaan tanda pada fungsi f(x)
- Mengulangi langkah ke 3 hingga diperoleh nilai yang diharapkan.

Penyelesaian Persoalan (Tabulasi)

- Tentukan akar penyelesaian dari persamaan:

$$f(x) = 2-5x+\sin(x) = 0$$

- Langkah:
  - Tentukan f(x) awal yg memenuhi syarat, misal:

    $$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=f(0)=2-5(0)+\sin(0)=2 \\ f(x_2)=f(1)=2-5(1)+\sin(1)=-2{,}15853 \end{array}\right\} f(x_1) * f(x_2) < 0$$

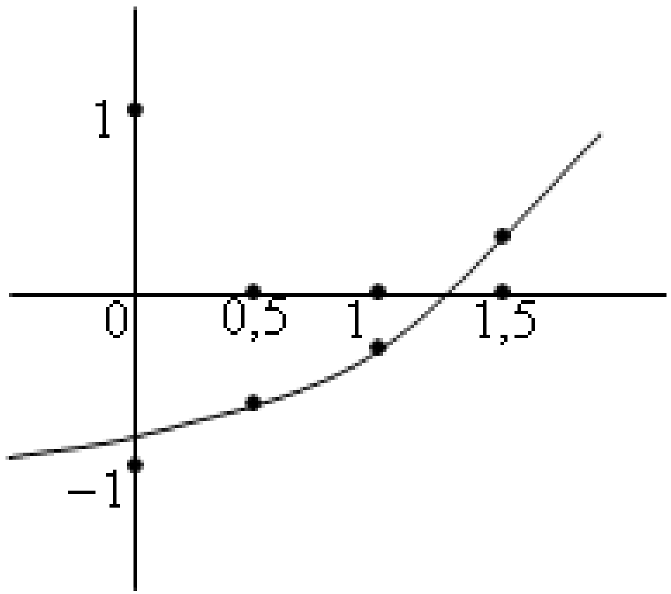
  - Buat Tabel

x	f(x)	Abs. error
0		
1		

Metode Grafik (contoh)

- Ingin dicari suatu akar dari $f(x) = e^x - 2 - x^2$
  - Tebakan awal $x_0 = 0{,}5$ dan $x_1 = 1{,}5$ dan selangnya $(\Delta x) = 0{,}5$

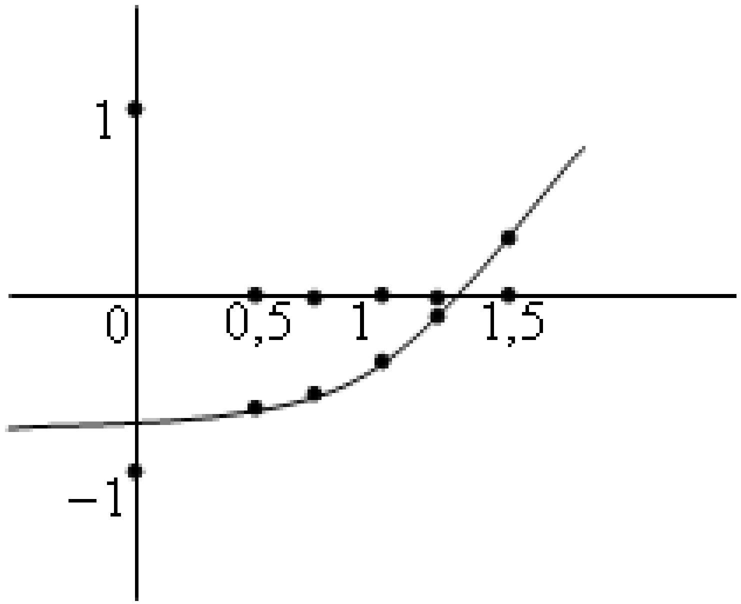
x	f(x)
0,5	– 0,60128
1	– 0,28172
1,5	0,23169



Metode Grafik (contoh)

- Tebakan awal $x_0 = 0{,}5$ dan $x_1 = 1{,}5$ dan selangnya $(\Delta x) = 0{,}25$

x	f(x)
0,5	– 0,60128
0,75	– 0,4455
1	– 0,28172
1,25	– 0,07216
1,5	0,23169



Metode Grafik (contoh)

- Tebakan awal x_0 = 0,5 dan x_1 = 1,5 dan selangnya (Δx) = 0,2

x	f(x)
0,5	– 0,60128
0,7	– 0,47625
0,9	– 0,3504
1,1	– 0,20583
1,3	– 0,02070
1,5	0,23169

– Dengan selang Δx = 0,25, akarnya adalah x = 1,25.

– Dengan selang Δx = 0,2, akarnya adalah x = 1,3. Dengan selang ini lebih teliti karena menghasilkan f(x) yang nilainya lebih dekat dengan 0.

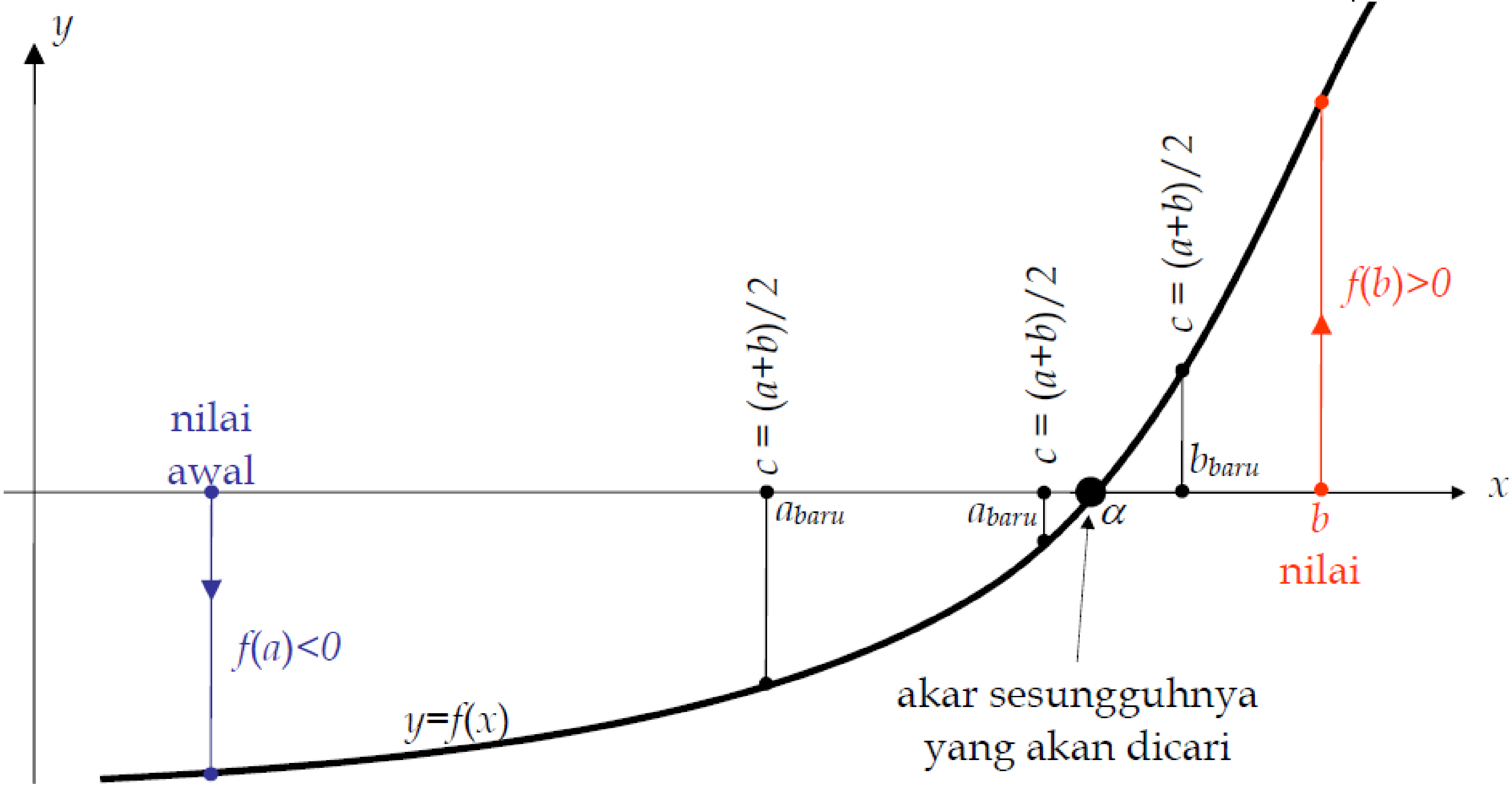
Metode Bisection (Bagi Dua)

- Syarat: f(x) real/nyata dan kontinu dalam interval x_i s/d x_u, dimana $f(x_i)$ dan $f(x_u)$ berbeda tanda sehingga $f(x_i).f(x_u) < 0$
- Metode ini digunakan untuk menentukan salah satu akar dari f(x).
- Dasar dari metode bagi 2 adalah metode carian inkremental.

Metode Carian Inkremental

- Proses dimulai dengan menentukan sebuah interval dimana fungsi tersebut bertukar tanda. kemudian penempatan perubahan tanda dari akar ditandai lebih teliti dengan cara membagi interval tersebut menjadi sejumlah subinterval (pada metode bagi dua, pencarian subintervalnya dengan cara membagi dua). Setiap subinterval dicari untuk menempatkan perubahan tanda. Proses tersebut diulangi dengan subinterval yang semakin lama semakin kecil hingga dicapai suatu proses konvergensi

representasi



Algoritma Metode Bisection

1. Pilih harga x_i yaitu harga x yang terendah dan x_u yaitu harga x yang tertinggi, agar fungsi berubah tanda sepanjang interval tersebut sehingga $f(x_i).f(x_u) < 0$
2. Taksiran pertama akar sebut dengan x_r ditentukan oleh:

$$x_r = \frac{x_i + x_u}{2}$$

Algoritma Metode Bisection

3. Evaluasi harga x_r untuk menentukan subinterval mana yang akan memuat harga akar dengan cara sebagai berikut
   - Jika $f(x_i)\mathbf{.}f(x_r) < 0$, akar terletak pada subinterval pertama, maka x_u baru = x_r.
   - Jika $f(x_i)\mathbf{.}f(x_r) > 0$, akar terletak pada subinterval kedua, maka x_i baru = x_r.
   - Jika $f(x_i)\mathbf{.}f(x_r) = 0$, maka proses komputasi berhenti dan akarnya = x_r.

Algoritma Metode Bisection

4. Buat taksiran akar baru = x_r baru dari

$$x_r = \frac{x_i + x_u}{2}$$

5. Putuskan apakah taksiran baru cukup akurat dengan kebutuhan yaitu biasanya $|\varepsilon_a| \leq |\varepsilon_s|$ yang ditentukan. Jika ya hentikan komputasi, jika tidak kembali lagi ke evaluasi.

Metode Bisection (contoh)

- $f(x) = e^x - 2 - x^2$, cari akarnya dengan metode bisection dimana $x_i = 0.5$; $x_u = 1.5$; $\varepsilon_s = 1\%$

Metode Bisection (contoh)

- Langkah 1:

1. $x_i = 0,5$; $x_u = 1,5$; $f(x_i) = -0,60128$; $f(x_u) = 0,23169$

2. $$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{0,5 + 1,5}{2} = 1$$

3. $f(x_r) = -0,28172$

   $f(x_i).f(x_r) = (-0,60128).(-0,28172) > 0$

   maka x_i baru = 1

4. $$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{1 + 1,5}{2} = 1,25$$

5. $$|\varepsilon_a| = \left|\frac{1,25 - 1}{1,25}\right| * 100\% = 20\%$$

Metode Bisection (contoh)

- Langkah 2:

3. $f(x_r) = f(1,25) = -0,07216$

   $f(x_i).f(x_r) = (-0,28172).(-0,07216) > 0$

   maka x_i baru = 1,25

4. $$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{1,25 + 1,5}{2} = 1,375$$

5. $$|\varepsilon_a| = \left|\frac{1,375 - 1,25}{1,375}\right| * 100\% = 9,1\%$$

Metode Bisection (contoh)

- Langkah 3:

3. $f(x_r) = f(1{,}375) = -0{,}06445$

   $f(x_i)\mathbf{.}f(x_r) = (-0{,}07216)\mathbf{.}(-0{,}06445) < 0$

   maka x_u baru = 1,375

4. $$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{1{,}25 + 1{,}375}{2} = 1{,}3125$$

5. $$|\varepsilon_a| = \left|\frac{1{,}3125 - 1{,}375}{1{,}3125}\right| * 100\% = 4{,}76\%$$

Metode Bisection (contoh)

- Langkah 4:

3. $f(x_r) = f(1,3125) = -0,0072$

   $f(x_i).f(x_r) = (-0,07216).(-0,0072) > 0$

   maka x_i baru = 1,3125

4. $$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{1,3125 + 1,375}{2} = 1,34375$$

5. $$|\varepsilon_a| = \left|\frac{1,34375 - 1,3125}{1,34375}\right| * 100\% = 2,3\%$$

Metode Bisection (contoh)

- Langkah 5:

  3. $f(x_r) = f(1{,}3125) = -0{,}0072$

     $f(x_i).f(x_r) = (-0{,}0072).(0{,}0277) > 0$

     maka x_i baru = 1,34375

  4. $$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{1{,}3125 + 1{,}34375}{2} = 1{,}328125$$

  5. $$|\varepsilon_a| = \left| \frac{1{,}328125 - 1{,}34375}{1{,}328125} \right| * 100\% = 1{,}176\%$$

Metode Bisection (contoh)

- Langkah 6:

3. $f(x_r) = f(1{,}328125) = 0{,}010$

   $f(x_i).f(x_r) = (-0{,}0072).(0{,}010) < 0$

   maka x_u baru = 1,328125

4. $$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{1{,}3125 + 1{,}328125}{2} = 1{,}3203$$

5. $$\left|\varepsilon_a\right| = \left|\frac{1{,}3203 - 1{,}328125}{1{,}3203}\right| * 100\% = 0{,}59\%$$

Metode Bisection (contoh)

Iterasi	$\mathbf{x_r}$	$\lvert\varepsilon_a\rvert$ **%**
1	1	–
2	1,25	20
3	1,375	9,1
4	1,3125	4,76
5	1,34375	2,3
6	1,328125	1,176
7	1,3203	0,59

Jika ε_s = 1 %, maka akarnya adalah x = 1,3203

Persoalan

(selesaikan dengan metode biseksi)

1. $f(x) = x^3 - 7x + 1 = 0$ (2,6 dan 2,5)
2. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = 0$
3. $f(x) = 2 - 3x + \sin x = 0$
4. $x^x = 12$