METODE NUMERIK

#01

Prinsip Pendekatan Numerik

Aproksimasi

Galat

Eka Maulana

Penyelesaian Persamaan

$$x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 3x^1 = 21$$

$$\sin(x) + 7x + e^x = 0$$

$$x^4 + 7{,}2x^3 + 4x^2 - 0{,}3x - 1 = 4{,}7$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x \sin x}{x^2} dx$$

Karakteristik Metode Pendekatan

Dalam penerapan matematis untuk menyelesaikan persoalan-persoalan perhitungan dan analisis, ada beberapa keadaan dan metode yang digunakan untuk menghasilkan penyelesaian yang baik adalah :

(1) Bila persoalan merupakan persoalan yang sederhana atau ada theorema analisa matematika yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan tersebut, maka penyelesaian matematis (**metode analitik**) adalah penyelesaian exact yang harus digunakan. Penyelesaian ini menjadi acuan bagi pemakaian metode pendekatan.

(2) Bila persoalan sudah sangat sulit atau tidak mungkin diselesaiakan secara matematis (analitik) karena tidak ada theorema analisa matematik yang dapat digunakan, maka dapat digunakan **metode numerik**.

(3) Bila persoalan sudah merupakan persoalan yang mempunyai kompleksitas tinggi, sehingga metode numerikpun tidak dapat menyajikan penyelesaian dengan baik, maka dapat digunakan metode-metode **simulasi**.

Mengapa Metode Numerik?

Metode numerik merupakan teknik untuk menyelesaikan masalah matematika dengan pengoperasian aritmatika (hitungan).

Beberapa alasan mengapa kita harus mempelajari metode numerik:

1. Metode numerik merupakan alat bantu pemecahan masalah matematika yang sangat ampuh. Metode numerik mampu menangani sistem persamaan besar, ketidaklinearan, dan geometri yang rumit yang dalam praktek rekayasa seringkali tidak mungkin dipecahkan secara analitik.

2. Di pasaran banyak tersedia program aplikasi numerik komersil. Penggunaan aplikasi tersebut menjadi lebih berarti bila kita memiliki pengetahuan metode numerik agar kita dapat memahami cara paket tersebut menyelesaikan persoalan.

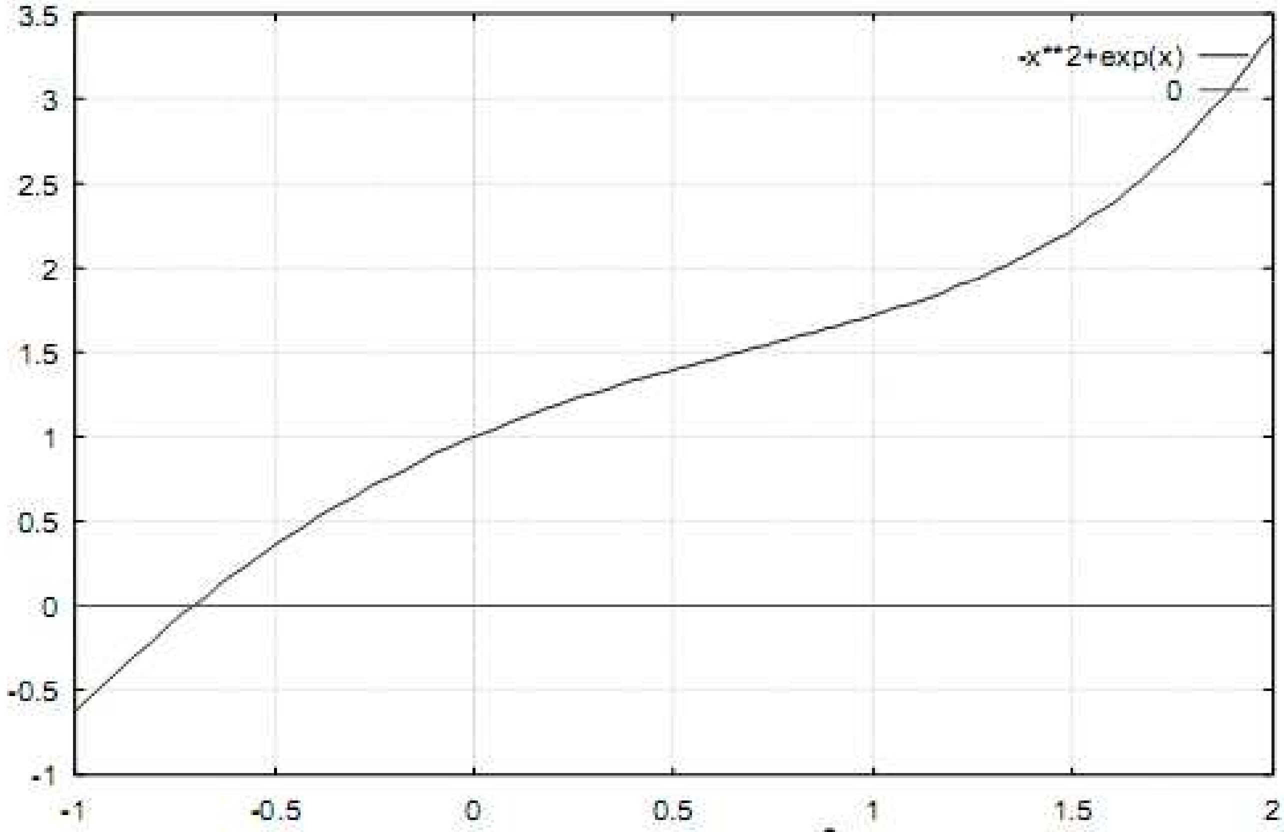
Mengapa Metode Numerik?

3. Kita dapat membuat sendiri program komputer tanpa harus membeli paket programnya. Seringkali beberapa persoalan matematika tidak selalu dapat diselesaikan oleh program aplikasi. Sebagai contoh, terdapat program aplikasi tertentu yang tidak dapat dipakai untuk menghitung integrasi lipat dua, atau lipat tiga. Mau tidak mau, kita harus menulis sendiri programnya. Untuk itu, kita harus mempelajari cara pemecahan integral lipat dua atau lebih dengan metode numerik.

4. Metode numerik menyediakan sarana untuk memperkuat kembali pemahaman matematika, karena metode numerik ditemukan dengan cara menyederhanakan matematika yang lebih tinggi menjadi operasi matematika yang mendasar.

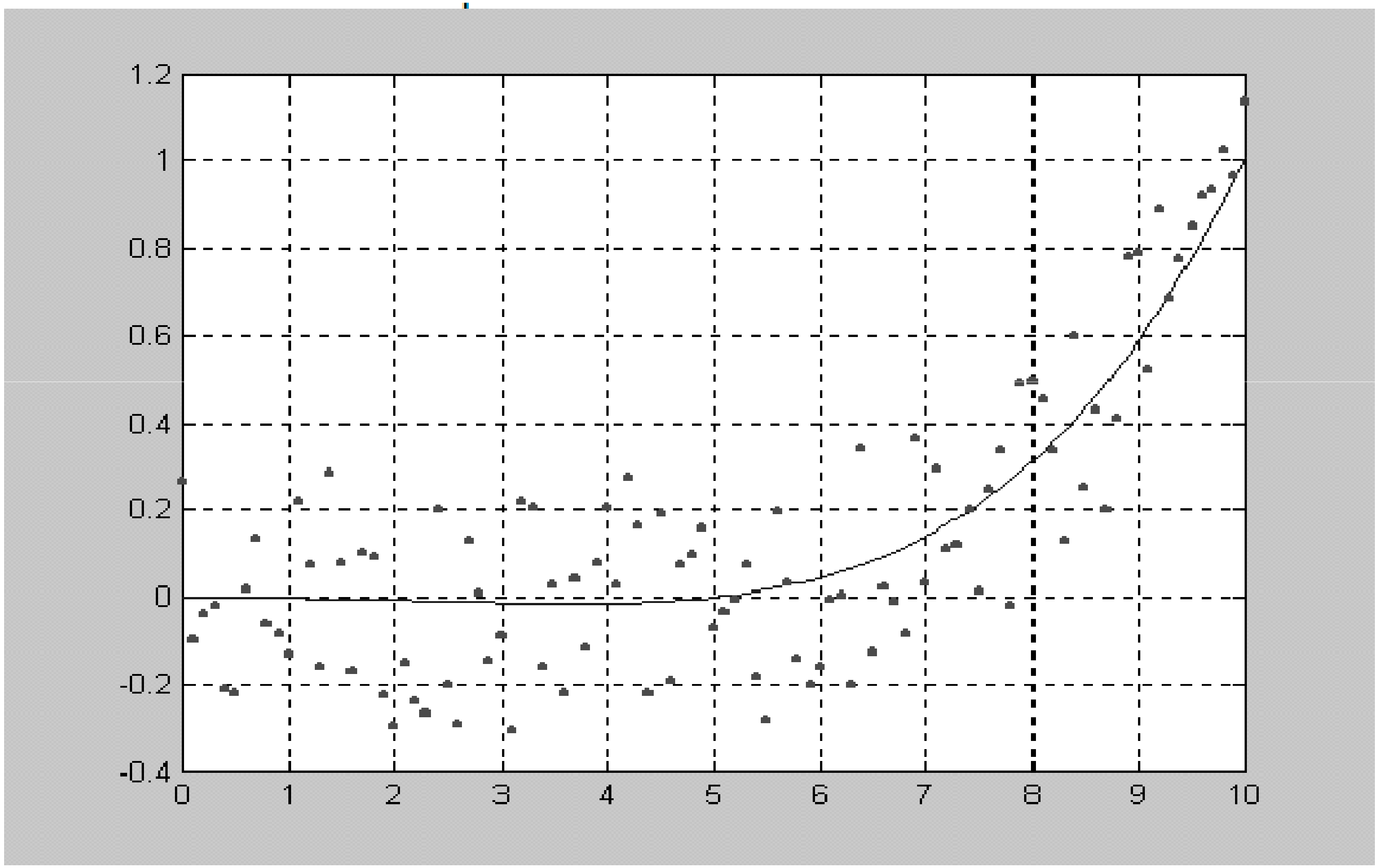
Case Study

$$y = x^2 + exp(x)$$



Gambar Kurva $y = x^2 + exp(x)$

Persoalan lain adalah bagaimana menentukan fungsi polynomial yang terbaik yang dapat mewakili suatu data seperti berikut:



Langkah Solusi Numerik

Langkah-langkah penyelesaian persoalan numerik:

1. Identifikasi masalah.
2. Memodelkan masalah secara matematis.
3. Identifikasi metode numerik yang diperlukan untuk menyelesaikan masalah.
4. Implementasi metode dalam komputer.
5. Analisis hasil akhir: implementasi, metode, model dan masalah.

Prinsip Metode Numerik

Algoritma dalam metode numerik adalah algoritma pendekatan, sehingga perhitungannya pun dilakukan berulang-ulang sampai mendekati nilai penyelesaian eksak

Contoh: $x_n = x_{n-1} + \delta x_{n-1}$

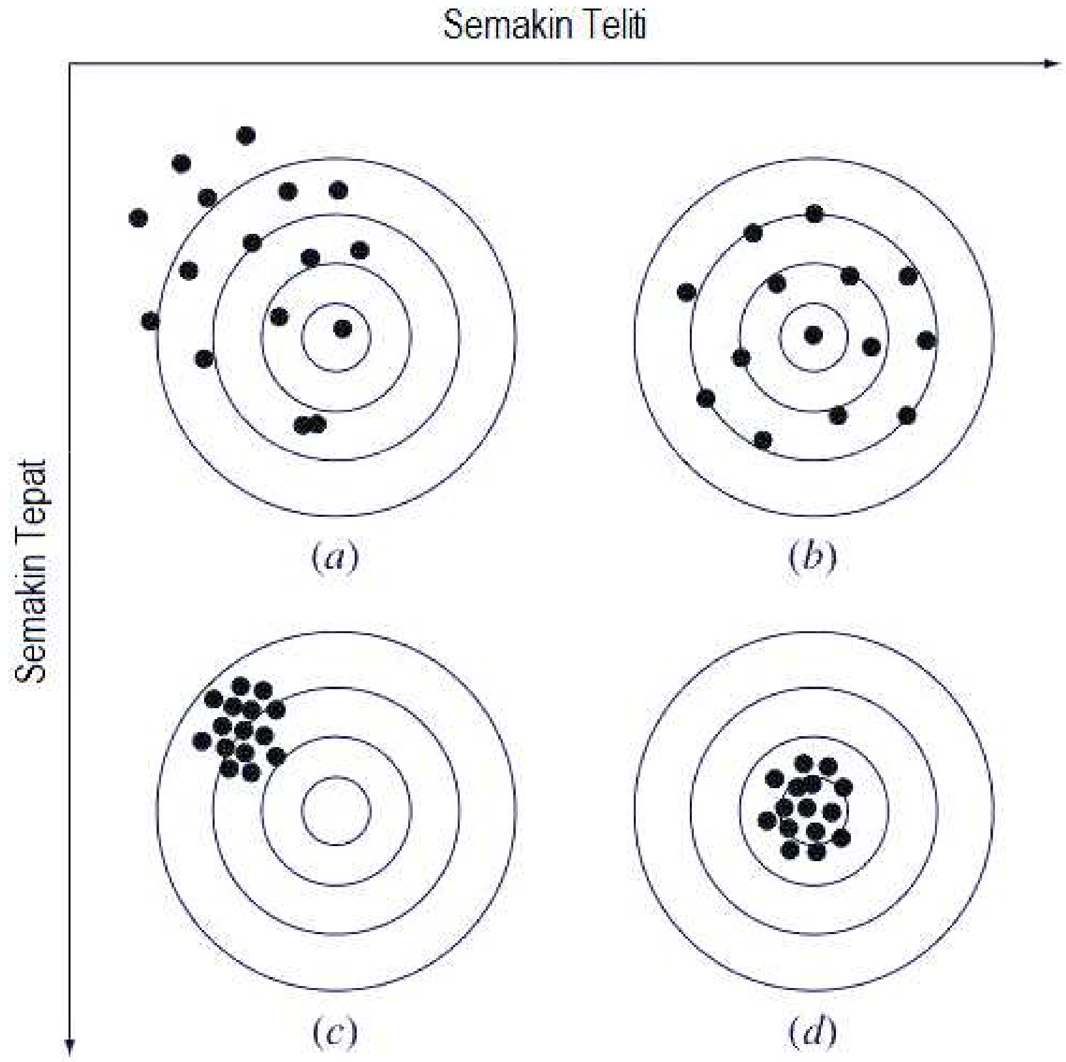
Fenomena lain, ANN

Ruang Lingkup Metode Numerik

Persoalan-persoalan yang biasa diangkat dalam metode numerik adalah persoalan-persoalan matematis yang penyelesaiannya sulit didapatkan dengan menggunakan metode analitik, antara lain:

- Menyelesaikan persamaan non linier
- Menyelesaikan persamaan simultan atau multi-variabel
- Menyelesaikan differensial dan integral
- Interpolasi dan Regresi
- Menyelesaikan persamaan differensial
- Masalah multi variable untuk menentukan nilai optimal yang tak bersyarat

Ketelitian dan Ketepatan



Galat Numerik

- Metode numerik tidak mengutamakan diperolehnya jawaban eksak dari persoalan yang diselesaikan.
- Penyelesaian yang digunakan adalah penyelesaian pendekatan, sehingga biasanya munculnya error (kesalahan)
- Galat Numerik muncul dari adanya aproksimasi untuk menyatakan operasi dan besaran matematis yang eksak.
- Dalam penyelesaian error dibuat sekecil mungkin.
- Error yang kecil ditunjukkan oleh **Konvergenitas**

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \ldots . > \varepsilon_n > \varepsilon_{n+1}$$

Jenis Kesalahan/Galat

Ada tiga macam galat:

1. Galat bawaan, terjadi karena kekeliruan dalam menyalin data, salah membaca skala, atau karena kurangnya pengertian mengenai hukum-hukum fisik dari data yang diukur.

2. Galat pembulatan (*round-off error*), terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan. Sebagai contoh, 3.1415926 dapat dibulatkan menjadi 3.14.

3. Galat pemotongan (*truncation error*), terjadi karena tidak dilakukannya hitungan sesuai dengan prosedur matematik yang benar. Sebagai contoh, turunan pertama dari $V(t)$ terhadap t dihitung dengan prosedur

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(t_{i+1}) - V(t_i)}{t_{i+1} - t_i}.$$

Kesalahan Pemotongan disebabkan adanya pemotongan pembatasan pada prosedur matematis yang tidak berhingga (*infinite mathemathics*) menjadi berhingga (*finite mathemathics*)

$$y = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{d^2 f}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \cdots + \frac{d^n f}{dx^n}(x - \bar{x})^n$$

- **Error data Input**

  Error yang terjadi akibat gangguan pada data input yang akan diproses, atau informasi tertentu yang tidak diketahui.

- **Blunders (gross error)**

  Error yang terjadi akibat kesalahan manusia atau mesin hitung.

Perhitungan Galat

nilai_sebenarnya = pendekatan + galat

galat (E_t) = nilai sebenarnya - pendekatan

$$galat\_relatif = \frac{galat}{nilai\_sebenarnya}$$

$$Persen\_galat\_relatif(\epsilon_t) = \frac{galat_{sebenarnya}}{nilai_{sebenarnya}} x100\%$$

$$Normalisasi\_Galat(\epsilon_a) = \frac{galat_{pendekatan}}{nilai_{pendekatan}}$$

Perhitungan Kesalahan/Galat

- Galat sebenarnya
  - Mengacu pada nilai analitis (nilai sebenarnya)

$$\varepsilon_t = \frac{\text{nilai\_pendekatan} - \text{nilai\_sebenarnya}}{\text{nilai\_sebenarnya}} \text{x}100\%$$

- Galat aproksimasi/pendekatan
  - Digunakan untuk proses iterasi tanpa mengetahui nilai sebenarnya

$$\boxed{\varepsilon_a = \frac{\text{aproksimasi\_sekarang} - \text{aproksimasi\_sebelumnya}}{\text{aproksimasi\_sekarang}} \text{x}100\%}$$

$$\boxed{|\epsilon_a| < \epsilon_s}$$

Toleransi

$$\boxed{\epsilon_s = (0{,}5x10^{2-n})\%}$$

Persoalan

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$e^{-x}$$

Hasil

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

x=0,5 dan SN=5

A	B	C	D	E	F	G	H	I
				galat_sebenarnya	galat_pendekatan			
x	i	nilai suku ke[i]	sum	Et(%)	Ea%			exp(0.5)
0.5	0	1	1	39.34693403				1.648721271
0.5	1	0.5	1.5	9.020401043	33.33333333			
0.5	2	0.125	1.625	1.438767797	7.692307692		SN	Es(%)
0.5	3	0.020833333	1.645833333	0.175162256	1.265822785		5	0.0005
0.5	4	0.002604167	1.6484375	0.017211563	0.157977883			
0.5	5	0.000260417	1.648697917	0.001416494	0.015795293			
0.5	6	2.17014E-05	1.648719618	0.000100238	0.001316257			
0.5	7	1.5501E-06	1.648721168	6.21969E-06	9.40183E-05			
0.5	8	1.16257E-05	1.648732794	0.000698917	0.000705132			
0.5	9	2.71267E-05	1.648759921	0.002344237	0.001645281			